ШИФР (не заполнять)
014334

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по математике вариант 1
(указать предмет)

Выполнил (а)

Фамилия: КУЗНЕЦОВ

Имя: АНДРЕЙ

Отчество: МАКСИМОВИЧ

Класс: 11

Наименование школы: МБОУ СОШ №11

Город (село): Северобайкальск

Область: Бурятия

Площадка проведения : МБОУ СОШ №11

Сирота: нет (указать да/нет) Инвалид: нет (указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат)

Дата рождения: 10 / 06 / 1999

Контактный телефон: +79500522742

E-mail: andreimaks99@gmail.com

vk.com/ondrkeec

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e – mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Куз

ШИФР

014334

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области(ОРМО)

1	2	3	4	5	Σ
7	0	10	6	10	33б

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

1 - $f(x)=\frac{x^2+3x-13}{x-1}$

$$\begin{array}{l|l} x^2+3x-13 & x-1 \\ \hline -x^2-x & x+4 \\ \quad 4x-13 & \\ \quad -4x-4 & \\ \qquad -9 & \end{array}$$

$\Longrightarrow f(x)=x+4-\frac{9}{x-1}$

делители 9: $\pm1;\pm3;\pm9$

а) $x-1=-1$, $x=0$; $x-1=1$, $x=2$

б) $x-1=-3$, $x=-2$; $x-1=3$, $x=4$

в) $x-1=-9$, $x=-8$; $x-1=9$, $x=10$.

ф-ия принимает наименьшее целое значение при $x=2$ и $x=-8$

$f(x)=-3$.

$f(0)=f(10)=13$

$f(-2)=f(4)=9$

$f(2)=f(-8)=-3$

$\longrightarrow$ наименьшее: -3.

2 - $\sin(2x-\frac{\pi}{8})=\cos 2x-\cos\frac{\pi}{8}$

применим формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ получим: $2\sin\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\cos\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}=-2\sin\frac{2x+\frac{\pi}{8}}{2}\sin\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}$

$\sin(x-\frac{\pi}{16})\cos(x-\frac{\pi}{16})+\sin(x+\frac{\pi}{16})\sin(x-\frac{\pi}{16})=0$

$\sin(x-\frac{\pi}{16})\left(\cos(x-\frac{\pi}{16})+\sin(x+\frac{\pi}{16})\right)=0.$

$\sin(x-\frac{\pi}{16})=0$ или $\cos(x-\frac{\pi}{16})+\sin(x+\frac{\pi}{16})=0$.

$x-\frac{\pi}{16}=\pi n$ $n\in Z$

$x=\frac{\pi}{16}+\pi n$ $n\in Z$.

применим формулу приведения. $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(x-\frac{\pi}{16})+\cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{16}))=0.$

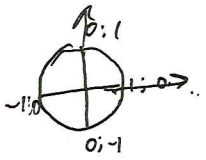
$\cos(x-\frac{\pi}{16})+\cos(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{16})=0.$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{16}-x\right)=0.$$

$$2\cos\frac{x-\frac{\pi}{16}+x-\frac{7\pi}{16}}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{16}-x+\frac{7\pi}{16}}{2}=0.$$

$$\cos\frac{2x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{\frac{6\pi}{16}}{2}=0.$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{3\pi}{16}=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$



$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

$$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k;\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{16}+\pi n,\ n\in Z$ ✓

$x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$ ✓

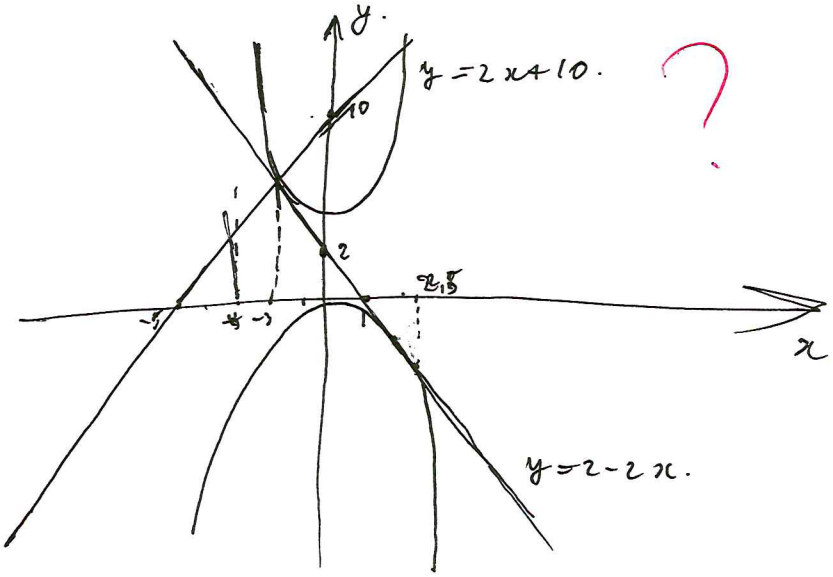
2. $y=ax^2+bx+1;\quad y=2x+10;\ y=2-2x.$

1) $y=ax^2+bx+1$ – парабола, ↑, если $a>0$, и ↓, если $a<0$.

2) $y=2x+10$ – прямая, $k=2$.

3) $y=2-2x$ – прямая, $k=-2$

4)



?

5) $y=2x+10$ должна быть касательной к параболе $\Rightarrow y'(x_0)=k$, т.е. $y'(x_0)=2$

$0=2ax_0+b=2$ (1).

$y=2-2x$ должна тоже быть касательной к параболе $\Rightarrow y'$ ... $b=-2$

из (I) => $x_0 = \frac{2-b}{2a}$; из (II) => $x_0 = \frac{-2-b}{2a}$.

абсцисса точек касания.

8) Рассмотрим первую точку касания: $x_0 = \frac{2-b}{2a}$.

$$\begin{cases} a\frac{(2-b)^2}{4a^2} + b\cdot\frac{2-b}{2a} + 1 = 2\cdot\frac{2-b}{2a} + 10 \quad |\cdot 4a^2 \\ a\frac{(2-b)^2}{4a^2} + b\cdot\frac{2-b}{2a} + 1 = 2 - 2\cdot\frac{2-b}{2a} \quad |\cdot 4a^2 \end{cases}$$

пусть $(2-b) = t \Rightarrow b = 2-t$

$$\begin{cases} a\cdot t^2 + (2-t)\cdot t\cdot 2a + 4a^2 = 2t\cdot 2a + 40a^2 \\ a t^2 + (2-t)\cdot t\cdot 2a + 4a^2 = 8a^2 - 2\cdot 2a\cdot t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} at^2 + 4at - 2at^2 + 4a^2 = 8\cdot 4at + 40a^2 \\ at^2 + 4at - 2at^2 + 4a^2 = 8a^2 - 4at. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -at^2 + 4a^2 = 40a^2 \\ -at^2 + 8at + 4a^2 - 8a^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} at^2 + 36a^2 = 0 \\ at^2 + 8at - 4a^2 = 0. \end{cases}$$

; $-\begin{cases} t^2 + 36a = 0 \Rightarrow a < 0. \\ t^2 + 8t - 4a = 0. \end{cases}$

$-8t + 36a + 4a = 0$

$8t = 40a.$

$t = 5a \Rightarrow 2 - b = 5a.$

$b = 2 - 5a$

т.к. $a < 0$, то

$y = 2 - 2x$; $x_0 = \frac{2-2+5a}{2a} = 2{,}5$

$a\cdot 6{,}25 + (2-5a)\cdot 2{,}5 + 1 = 2 - 2\cdot 2{,}5$

$6{,}25a + 5 - 12{,}5a + 1 = 2 - 5.$

$-6{,}25a = -6 - 3$

$-6{,}25a = 9.$

$a = 1{,}44.$; $b = 2 - 5\cdot 1{,}44 = 2 - 7{,}2 = -5{,}2$

$y = 1{,}44x^2 - 5{,}2x + 1$ касается $y = 2 - 2x$ в точке $x_0 = 2{,}5$

$a = 1{,}44$ $b = -5{,}2$ – III ответ

Чистовик 4

9) $x_0 = \frac{-2-b}{2a}$; $2+b = t$ $b = t-2$.

$$\begin{cases} a \cdot \frac{(2+b)^2}{4a^2} - b \cdot \frac{2+b}{2a} \cdot 2a + 1 = 2 \cdot \frac{-2-b}{2a} \cdot 2a + 10 \quad | \cdot 4a^2 \\ a \cdot \frac{(2+b)^2}{4a^2} - b \cdot \frac{2+b}{2a} + 1 = 2 + 2 \cdot \frac{2+b}{2a} \cdot 2a \quad | \cdot 4a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} at^2 - (t-2) \cdot t \cdot 2at + 4a^2 = -4at + 40a^2 \\ at^2 - (t-2)t \cdot 2 \cdot a + 4a^2 = 8a^2 + 4at. \end{cases}$$

$$\begin{cases} at^2 - 2at^2 + 4at + 4a^2 = -4at + 40a^2 \\ at^2 - 2at^2 + 4at + 4a^2 = 4at + 8a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -at^2 + 8at - 36a^2 = 0. \\ -at^2 + 4a^2 = 8a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} at^2 - 8at + 36a^2 = 0. \\ at^2 - 4a^2 = 8a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 8t + 36a = 0. \\ at^2 - 12a^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 8t + 36a = 0. \\ t^2 - 12a = 0. \end{cases}$$

$t^2 = 12a$, $a > 0$.

Возьмем из 1-го второе ур-е:

$t^2 - 8t + 36a - t^2 + 12a = 0.$

$-8t + 48a = 0.$

$8t = 48a$

$t = 6a \Rightarrow t = 2+b \Rightarrow 6a = 2+b.$

$b = 6a - 2.$

$y = 2x + 10$, $x_0 = \frac{-2-6a+2}{2a} = -3.$

$9a + (6a-2) \cdot (-3) + 1 = 2 \cdot (-3) + 10.$

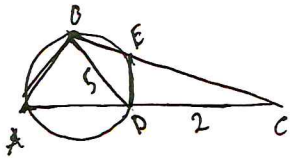
$9a - 18a + 6 + 1 = 4.$

$-9a = 3$

$a = \frac{1}{3}$, тогда $b = 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 = 0.$

Чистовик 5

4)



1) $\triangle BDE$:

$$\frac{BD}{\sin\angle BED} = 2R_1$$

?

$$\frac{5}{\sin\angle BED} = 2\cdot 4.$$

$$\frac{5}{8} = \sin\angle BED$$

2) $\triangle DEC$

$$\frac{DC}{\sin\angle DEC} = 2R_2$$

$$\frac{2}{\sin(180^\circ - \angle DEB)} = 2R_2$$

$$\frac{2}{\sin\angle DEB} = 2R_2; \quad \frac{2\cdot 8}{5} = 2R_2 \quad R_2 = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Ответ: $R = 1{,}6$.

5). $\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0. \\ x^3 - (a+3x^2 + 3ax \leq 0. \end{cases}$

I $x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0.$

$x(x^2 - a + 3)x + 3a) \leq 0.$

$x^2 - (a+3)x + 3a = 0.$

$D = a^2 + 6a + 9 - 12a = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$

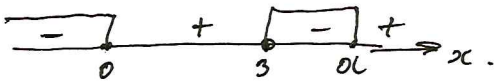
$x_{1,2} = \frac{(a+3) \pm |a-3|}{2}$

$|a-3| = \begin{cases} a-3, & a \geq 3 \\ 3-a, & a < 3 \end{cases}$

а) если $a \geq 3$, то $x_{1,2} = \frac{(a+3) \pm (a-3)}{2} = \left[\begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$

б) если $x < 3$, то $x_{1,2} = \frac{(a+3) \pm (3-a)}{2} = \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = a \end{array}\right.$

1) $x(x-a)(x-3) \leq 0.$, пусть $a \geq 3$, тогда $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $x_3 = 3$.



$x \leq 0$, $3 \leq x \leq a$.

2) пусть $a \geq 3$, тогда а)

$x \leq 0$, $x \in [a; 3]$.

б)

$x \leq a$; $x \in [0; 3]$

Чистовик 6.

II

$x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0.$

$(x^3 - (a+3)x^2 + 3ax) + 2x - 2a \geq 0$

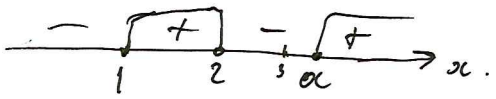
$x(x-a)(x-3) + 2(x-a) \geq 0.$

$(x-a)(x^2-3x+2) \geq 0$

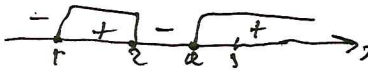
$(x-a)(x-1)(x-2) \geq 0$

$x = a,\ x = 1,\ x = 2,$

а) пусть $a \geq 3$, тогда $1 \leq x \leq 2,\ x \geq a$, т.е $x \geq 3$

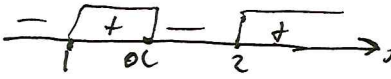


б) пусть $a < 3$, тогда



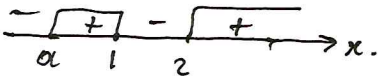
$1 \leq x \leq 2,\ x \geq a.$

или



$1 \leq x \leq a,\ x \geq 2$

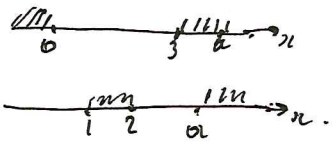
или



$a \leq x \leq 1,\ x \geq 2$

III

1) при $a \geq 3$

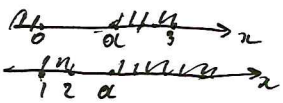


$\Rightarrow x = a$, где $a \geq 3$

ед решение

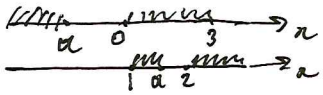
2). при $a < 3$

а)



$x \in [a; 3]$, где $a \in [2; 3)$ — ед. решение.

б)

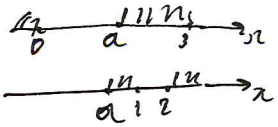


$x \in [1; a],\ 1 < a < 2$

$x \in [2; 3]$

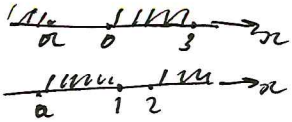
Два решения

в)



два реш

г)



$x = a$

$0 \leq x \leq 1$

$2 \leq x \leq 3$

три реш

Ответ: ед. решения. при $a \geq 3$, $x = a$; $x \in [a; 3]$ при $a \in [2; 3)$.