| ШИФР (не заполнять) |
|---|
| 018089 |

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»**

# ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по математике (указать предмет) вариант 1

Выполнил (а)

Фамилия: СМЫГАЛИНА

Имя: ПОЛИНА

Отчество: ПАВЛОВНА

Класс: 11

Наименование школы: МАОУ „Лицей №15"

Город (село): г. Кызыл

Область: респ. Тыва

Площадка проведения : г. Кызыл, Лицей №15.

Сирота: нет (указать да/нет) Инвалид: нет (указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат)

Дата рождения: 02 / 06 / 1999

Контактный телефон: 8-960-778-67-54

E-mail: ms.glados@mail.ru

vk.com/

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

*Личная подпись*

ШИФР 013039

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 30 | | Хмылева Т.Е | |

Задание 1.

$$f(x) = \frac{x^2+3x-13}{x-1}$$

Поделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^2+3x-13 & x-1 \\ \hline -\ x^2-x & x+4 \\ \quad 4x-13 & \\ \quad -\ 4x-4 & \\ \quad\quad -9 & \end{array}$$

$$f(x) = x+4-\frac{9}{x-1}$$

По условию значение функции целое $\Rightarrow$

$-\frac{9}{x-1}$ – целое число $\Rightarrow$ $x-1$ является делителем 9.

$x-1=1 \rightarrow x=2$

$x-1=-1 \rightarrow x=0$

$x-1=3 \rightarrow x=4$

$x-1=-3 \rightarrow x=-2$

$x-1=9 \rightarrow x=10$

$x-1=-9 \rightarrow x=-8$

$f(2) = 2+4-\frac{9}{2-1} = 2+4-9 = -3$

$f(0) = 0+4-\frac{9}{0-1} = 0+4+9 = 13$

$f(4) = 4+4-\frac{9}{4-1} = 4+4-3 = 5$

$f(-2) = -2+4-\frac{9}{-2-1} = -2+4+3 = 5$

$f(10) = 10+4-\frac{9}{10-1} = 10+4-1 = 13$

$f(-8) = -8+4-\frac{9}{-8-1} = -8+4+1 = -3$

Наименьшее целое значение функция принимает при $x = 2; -8$

7

Ответ 1: Наименьшее целое значение −3 функция принимает при $x = 2; -8$.

Задание 2.

$y = ax^2 + bx + 1$ $\quad a, b - ?$

$y_1 = 2x + 10$, $y_2 = 2 - 2x$

Найдем точку пересечение прямых $y_1$ и $y_2$:

$2x + 10 = 2 - 2x$

$4x = -8$

$x = -2$

Прямые пересекаются в точке с абсциссой −2. Вершина параболы будет находится на прямой $x = -2$.

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -2 \longrightarrow b = 4a$

Найдем точки касания прямых и параболы:

$ax^2 + bx + 1 = 2x + 10$ $\quad ax^2 + bx + 1 = 2 - 2x$

Заменим $b = 4a$

$ax^2 + 4ax + 1 = 2x + 10$ $\quad ax^2 + 4ax + 1 = 2 - 2x$

$ax^2 + x(4a - 2) - 9 = 0$ $\quad ax^2 + x(4a + 2) - 1 = 0$

Точка касания одна $\Rightarrow D = 0$

$D = (4a - 2)^2 + 36a = 0$ $\quad D = (4a + 2)^2 + 4a = 0$

$16a^2 - 16a + 4 + 36a = 0$ $\quad 16a^2 + 16a + 4 + 4a = 0$

$16a^2 + 20a + 4 = 0$

$4a^2 + 5a + 1 = 0$

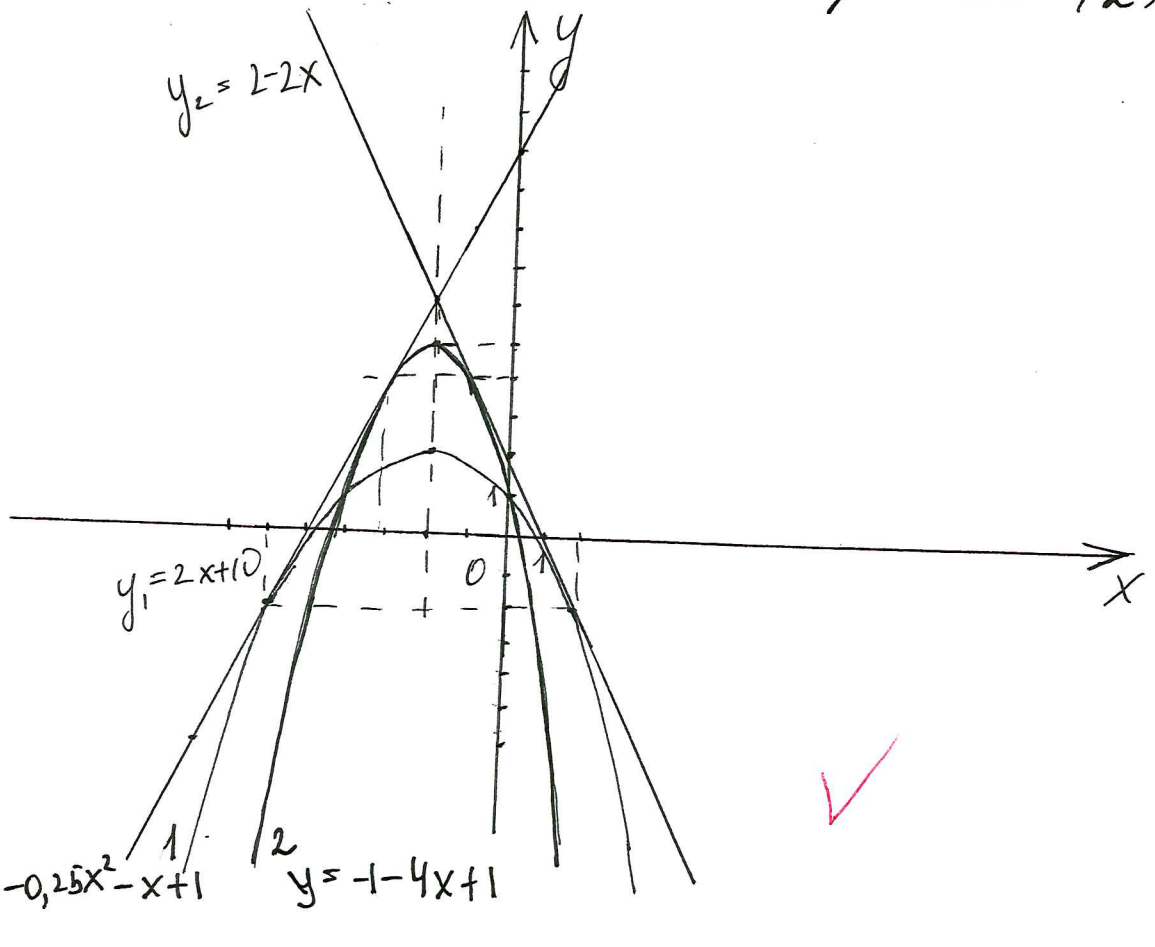
$a_1 = -0{,}25$ $\quad a_2 = -1$

продолжение задания 2.

$b_1 = 1$ $\quad b_2 = 4$

Паре $a = -0{,}25$ и $b = -1$ будет соответствовать парабола (1),

а паре $a = -1$, $b = -4$ будет соответствовать парабола (2).




Докажем, что выше точки пересечения прямых $(-2; 6)$ парабола находиться не может.

$y(-2) > 6$

$a \cdot 4 + b(-2) + 1 > 6$

$4a - 4a \cdot 2 + 1 > 6$

$-4a > 5 \qquad a < -1{,}25$

При $a < -1{,}25$ ветви параболы направлены вниз и будь она выше $y = 6$ она бы пересекала прямые, а не касалась.

Ответ: $a = -0{,}25$, $b = -1$ ; $a = -1$, $b = -4$

8

Задание 3.

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x-\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\cos 2x=\cos 2x-\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\sin 2x\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}=\cos 2x+\sin\frac{\pi}{8}\cos 2x$$

$$\cos\frac{\pi}{8}(\sin 2x+1)=\cos 2x\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{8}}(\sin 2x+1)=\cos 2x\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

Возведем обе части в квадрат: $\Downarrow$ не равносильное преобраз.

$$\left(1-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)(\sin 2x+1)^2=\cos^2 2x\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)(2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x)^2=$$

$$=(\cos^2 x-\sin^2 x)^2\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$$

$\because \left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)\neq 0$ ?

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)(\sin x+\cos x)^4=(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)^2\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

Делим обе части на $(\sin x+\cos x)^2$. $\neq$ ~~$\because(\sin x+\cos x)\neq 0$~~

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)(\sin x+\cos x)^2=(\cos x-\sin x)^2\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)=(\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{8}\right)(1+\sin 2x)=(1-\sin 2x)\left(1+\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$1+\sin 2x-\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\sin 2x=1+\sin\frac{\pi}{8}-\sin 2x-\sin\frac{\pi}{8}\sin x$$

0

$$2\sin 2x=2\sin\frac{\pi}{8}$$

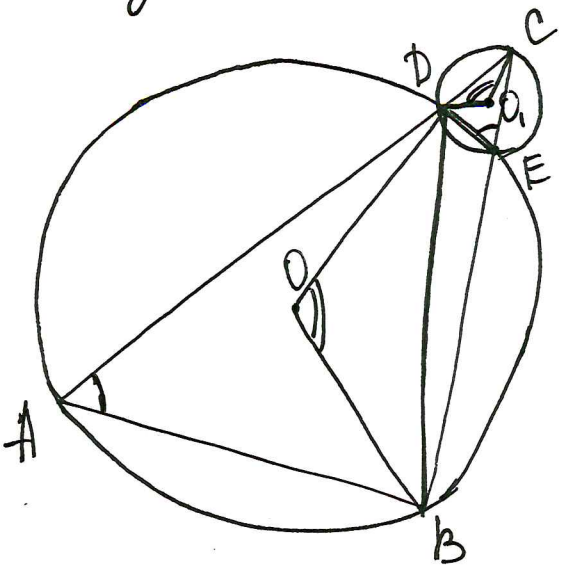
$$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{8}$$

$2x=\frac{\pi}{8}+2\pi n$ или $2x=\frac{7\pi}{8}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

$x=\frac{\pi}{16}+\pi n$ или $x=\frac{7\pi}{16}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{16}+\pi n$; $\frac{7\pi}{16}+\pi n$ ?, $n\in\mathbb{Z}$.

Задание 4.




Дано: $\triangle ABC$

окр. $R=4$ через $A$ и $B$

окр. $\cap AC = D$

окр. $\cap CB = E$

$CD = 2$

$BD = 5$

Найти: $R_{CDE} = ?$

Решение:

Четырехугольник $ABED$ - вписанный $\Rightarrow$

$\angle DAB + \angle BED = 180^\circ \Rightarrow \angle DAB = 180^\circ - \angle BED$

$\angle BED$ - внешний угол $\triangle CDE \Rightarrow$

$\angle BED = \angle BCA + \angle CDE$

$\angle DAB = 180^\circ - \angle BCA - \angle ABC$

$\angle DAB = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - \angle BCA - \angle CDE$

$180^\circ - \angle BCA - \angle ABC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CDE$

$\left.\begin{array}{l} \angle ABC = \angle CDE \\ \angle ACB \text{ - общий для } \triangle ABC \text{ и } \triangle CDE \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE$ (по I приз.)

$\rightarrow \angle BAC = \angle DEC$

$\left.\begin{array}{l} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOD \text{ (впис. угол)} \\ \angle DEC = \frac{1}{2} \angle DO_1C \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BOD = \angle DO_1C$

$\triangle BOD$ и $\triangle DO_1C$ - рвб ($OB = OD = R$, $O_1D = O_1C = R_{CDE}$)

$\angle BOD = \angle DO_1C \Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle DO_1C \Rightarrow$

$\frac{BD}{CD} = \frac{OD}{O_1D} \Rightarrow O_1D = \frac{OD \cdot CD}{BD} = \frac{4 \cdot 2}{5} = 1,6$

Ответ: $O_1D = 1,6$.

10

5

Задание 5.

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 & (1) \\ x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0$

$x^3-ax^2-3x^2+3ax+2x-2a \geq 0$

$(x-a)(x^2-3x+2) \geq 0$

$(x-a)(x-1)(x-2) \geq 0$

(2): $x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0$

$x^3-ax^2-3x^2+3ax \leq 0$

$(x-a)\cdot x(x-3) \leq 0$

$$\begin{cases} (x-a)(x-1)(x-2) \geq 0 \\ x(x-a)(x-3) \leq 0 \end{cases}$$

Неравенства имеют разные знаки => ~~точка~~ единственное общее решение 0.

$(x-a)(x-1)(x-2)=0$ $\quad$ $x(x-a)(x-3)=0$

Чтобы однозначно получать единственное решение системы, необходимо, чтобы $a=x$.

Ответ: $a=x$.

a – ?

5 б