ШИФР (не заполнять)
013057

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по математике (указать предмет) вариант 1

Выполнил (а)

Фамилия: ТВЕРДОХЛЕБОВ

Имя: ЛЕОНИД

Отчество: ЕВГЕНЬЕВИЧ

Класс: 11

Наименование школы: МАОУ „Гимназия г. Юрги"

Город (село): Юрга

Область: Кемеровская область

Площадка проведения : Юрга

Сирота: нет *(указать да/нет)* Инвалид: нет *(указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат)*

Дата рождения: 02 / 09 / 1999

Контактный телефон: 8-951-177-82-42

E-mail: Ever.lenya@mail.ru

vk.com/

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись

ШИФР 013057

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
458			

Лист №1

1. $f(x) = \frac{x^2+3x-13}{x-1}$; $x^2+3x-13 = x^2-3x-4-9$

$x^2+3x-4=0$

$D = 9+16 = 5^2$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm5}{2} = 1; 4$

58.

$f(x) = \frac{x^2+3x-13}{x-1} = \frac{(x-1)(x+4)-9}{x-1} = (x+4) - \frac{9}{x-1}$ ±1

Т.к $f(x)$ - целое значение $(x-1) = \pm 9; \pm 3$ (перебираем)

1) $x-1=9$, $x=10$ 2) $x-1=3$, $x=4$ 3) $x-1=-9$, $x=-8$ 4) $x-1=-3$, $x=-2$ 5) $x-1=1$, $x=2$ 6) $x-1=-1$, $x=0$

1) $f(10) = 14-1=13$ ×

2) $f(4) = 8-3=5$ ×

3) $f(-8) = -4+1=-3$ +

4) $f(-2) = 2+3=5$ ×

5) $f(2) = 6-9=-3$ +

6) $f(0) = 4+9=13$ ×

Наименьшее значение достигается при $f(2)$ и $f(-8)$

Ответ: 2; -8

2. $y = ax^2+bx+1$; $y = 2x+10$; $y = 2-2x$

1) $ax^2+bx+1 = 2x+10$

$ax^2+bx+1-2x-10=0$

$ax^2+(b-2)x-9=0$

Одно решение будет при $D=0$

$D = (b-2)^2+36 = b^2-4b+4+36a = 0$

2) $ax^2+bx+1 = 2-2x$

$ax^2+bx+1-2+2x=0$

$ax^2+(b+2)x-1$ Одно решение при $D=0$

$D = b^2+4b+4+4a=0$

3) $\begin{cases} b^2-4b+4+36a=0 \\ b^2+4b+4+4a=0 \end{cases}$

$4a = -b - 4b - 4$

$a = -\frac{b^2}{4} - b - 1$

$b^2 - 4b + 4 - 9b^2 - 36b - 36 = 0$

$-8b^2 - 40b - 32 = 0$

$b^2 + 5b + 4 = 0$

$D = 25 - 16 = 3^2$

$b_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = -1; -4$

подробнее!

5б.

1) $b = -1$ $\quad a = -\frac{1}{4} + 1 - 1 = -\frac{1}{4}$

2) $a = -4 + 4 - 1 = -1$ $\quad b = -4$

Ответ: 1) $a_1 = -\frac{1}{4}$; $b_1 = -1$ 2) $a_2 = -1$ $\quad b_2 = -4$

~~8б~~

3. $\sin(2x - \frac{\pi}{8}) = \cos 2x - \cos\frac{\pi}{8}$

$\sin(2x - \frac{\pi}{8}) = -2\sin\frac{2x - \frac{\pi}{8}}{2} \cdot \sin\frac{2x + \frac{\pi}{8}}{2}$

$\sin(2x - \frac{\pi}{8}) = -2\sin(x - \frac{\pi}{16})\sin(x + \frac{\pi}{16})$

Распишем левую часть как „двойной угол синуса"

$2\sin(x - \frac{\pi}{16})\cos(x - \frac{\pi}{16}) + 2\sin(x - \frac{\pi}{16})\sin(x + \frac{\pi}{16}) = 0$

$2\sin(x - \frac{\pi}{16})\left(\cos(x - \frac{\pi}{16}) + \sin(x + \frac{\pi}{16})\right) = 0$

1) $\sin(x - \frac{\pi}{16}) = 0$

$x - \frac{\pi}{16} = \pi k$

$x = \frac{\pi}{16} + \pi k, k \in Z$

2) $\cos(x - \frac{\pi}{16}) + \sin(x + \frac{\pi}{16}) = 0$

$\cos(x - \frac{\pi}{16}) + \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{16}) = 0$

$\cos(x - \frac{\pi}{16}) + \cos(\frac{7\pi}{16} - x) = 0$

$2\cos\frac{3\pi}{16} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

Так как $2\cos\frac{3\pi}{16} \neq 0$, то решением будет:

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \pi k$; $\frac{3\pi}{4} + \pi n$; $k, n \in Z$

10б

4. Дано:

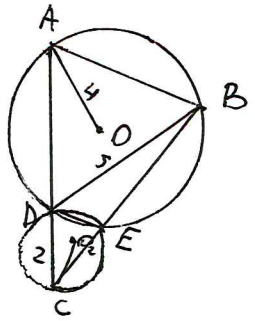
Окр (O; 4)

Окр (O; 4) ∩ AC = D

Окр (O; 4) ∩ BC = E

BD = 5 ; DC = 2

Найти: O_2C - ?



Решение:

1) △ BDE - вписан в данную окружность

По теореме ~~синусов~~ синусов: $2R = \frac{BD}{\sin\angle BED}$

$\sin\angle BED = \frac{BD}{2R} = \frac{5}{2\cdot 4} = \frac{5}{8}$

$\angle BED$ смежен с $\angle DEC$ => $\sin\angle BED = \sin\angle DEC = \frac{5}{8}$

2) △ DEC по т. синусов $2R_1 = \frac{DC}{\sin\angle DEC}$

$O_2C = \frac{DC}{2\sin\angle DEC} = \frac{2}{2\cdot\frac{5}{8}} = \frac{8}{5} = 1,6$

Ответ: $1,6 = \frac{8}{5}$

10б

5. $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0 \end{cases}$

1) $x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0$

Очевидно, что при $x=1$ левая часть равна 0

$1-a-3+3a+2-2a=0$ $\quad 0=0$ (в) => $x=1$ - решение

$$\begin{array}{l|l} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a & x-1 \\ \hline -\ x^3-x^2 & x^2-(a+2)x+2a \\ \quad -(a+2)x^2+(3a+2)x & \\ \quad -\ -(a+2)x^2+(a+2)x & \\ \qquad 2ax-2a & \\ \qquad -\ 2ax-2a & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Т.е первоначальное уравнение равносильно

$(x-1)(x^2-(a+2)x+2) \geq 0$

$x^2-(a+2)x+2=0$

$x^2-ax-2x+2a=0$

$(x-a)(x-2)=0$

$(x-1)(x-2)(x-a) \geq 0$

Найдем решение в зависимости от a

а) $a>2$

$-\ +\ -\ +$

$1\quad 2\quad a$

$x \in [1;2] \cup [a;+\infty)$

б) $a \in (1;2)$

$-\ +\ -\ +$

$1\quad a\quad 2$

$x \in [1;a] \cup [2;+\infty)$

в) $a<1$

$-\ +\ -\ +$

$a\quad 1\quad 2$

$x \in [a;1] \cup [2;+\infty)$

г) $a=1$

$-\ a\ -\ +$

$1\quad 2$

$x \in [2;+\infty)$

д) $a=2$

$-\ +\ a\ +$

$1\quad 2$

$x \in [1;+\infty)$

Лист 4

2) $x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \le 0$

$x(x^2 - (a+3)x + 3a) \le 0$

$x(x-3)(x-a) \le 0$

$x^2 - ax - 3x + 3a = 0$

$(x-3)(x-a) = 0$

а) $a > 3$

$- \quad + \quad - \quad +$

$0 \quad 3 \quad a$

$x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty)$

б) $a \in (0; 3)$

$- \quad + \quad - \quad +$

$0 \quad a \quad 3$

$x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

в) $a < 0$

$- \quad + \quad - \quad +$

$a \quad 0 \quad 3$

$x \in (-\infty; a] \cup [0; 3]$

г) $a = 0$

$- \quad a \quad - \quad +$

$0 \quad 3$

$x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$

д) $a = 3$

$- \quad + \quad a \quad +$

$0 \quad 3$

$x \in (-\infty; 0]$

3) Сопоставим эти два решения в зависимости от параметра (т.е решим систему)

а) $a > 3$

$x = a$ - 1 решение

б) $a \in (2; 3)$

решений нет

в) $a \in (1; 2)$

$x \in [3; +\infty)$

г) $a \in (0; 1)$

$x \in \{a\} \cup [2; 3]$

е) $a = 3$

$x = 3$ - 1 решение

ж) $a = 2$

$x \in [3; +\infty)$

з) $a = 1$

$x \in [3; +\infty)$

и) $a = 0$

$x \in [0; 1] \cup [2; 3]$

4) 1 решение при $a > 3$ и $a = 3$

Ответ: $a \in [3; +\infty)$

15б