ШИФР (не заполнять)
013056

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по математика (указать предмет) вариант 1

Выполнил (а)

Фамилия: ЧУСОВИТИНА

Имя: АНАСТАСИЯ

Отчество: АЛЕКСЕЕВНА

Класс: 11

Наименование школы: МАОУ „Гимназия г. Юрги"

Город (село): Юрга

Область: Кемеровская

Площадка проведения : Юрга

Сирота: _____ *(указать да/нет)* Инвалид: _____ *(указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат)* _____

Дата рождения: 12 / 01 / 2000

Контактный телефон: 8-923-521-83-78

E-mail: chusiknancy@mail.ru

vk.com/_____

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e – mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись _____

ШИФР 013056

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
~~48~~	33б.	Хмелева Г.Е	

① $f(x) = \frac{x^2+3x-13}{x-1}$

преобразуем выражение, что-бы оно содержало квадратное уравнение

$$\frac{x^2+3x-4-9}{x-1} = \frac{(x+4)(x-1)-9}{x-1} = x+4-\frac{9}{x-1}$$

т.к. наименьшее значение целое, $x-1$ должен являться делителем числа 9

1) При $x-1=1$
$x=2$
$y(2)=2+4-\frac{9}{1}=\underline{-3}$

2) при $x-1=-1$
$x=0$
$y(0)=0+4-\frac{9}{-1}=13$

3) при $x-1=-3$
$x=-2$
$y(-2)=-2+4-\frac{9}{-3}=5$

4) при $x-1=3$
$x=4$
$y(4)=4+4-\frac{9}{3}=5$

5) при $x-1=-9$
$x=-8$
$y(-8)=-8+4-\frac{9}{-9}=\underline{-3}$

6) при $x-1=9$
$x=10$
$y(10)=10+4-\frac{9}{\cancel{19}}=13\cancel{,1}$

шифр.

наименьшие значения получаются при $x=2$ и $x=-8$

Ответ: 2 ; -8.

7

② Т.к. парабола касается двух прямых, получается 2 системы

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+1 \\ y=2x+10 \\ D=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax^2+bx+1=2x+10 \\ D=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax^2+(b+2)x-9=0 \\ D=(b-2)^2+9\cdot 4a=0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+1 \\ y=2-2x \\ D=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax^2+bx+1=2-2x \\ D=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax^2+(b+2)x-1=0 \\ D=(b+2)^2+4a=0 \end{cases}.$$

к параболе

функция является касательной, когда имеет 1 общую точку, $D=0$, значит

$(b-2)^2+9\cdot 4a=(b+2)^2+4a$

$b^2-4b+4+9\cdot 4a=b^2+4b+4+4a$

$-8b+8\cdot 4a$

$-b+4a=0$

$b=4a$

6б

подставим значение b в $D=(b+2)^2+4a=0$

$(4a+2)^2+4a=0$

$16a^2+16a+4+4a=0$

$16a^2+20a+4=0 \quad /:4$

$4a^2+5a+1=0$

$D=25-16=9$

$a_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{8}$

$a_1=-1$

$a_2=-\frac{1}{4}$

подставим значения a в $b=4a$

$b=4\cdot(-1)$ $\quad$ $b=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

$b=-4$ $\quad$ $b=-1$

Ответ: $a=-1$, $b=-4$ или $a=-\frac{1}{4}$, $b=-1$

2.

шифр.

③ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x-\cos\frac{\pi}{8}$

используя разность косинусов:

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=-2\sin\frac{2x-\frac{\pi}{8}}{2}\sin\frac{2x+\frac{\pi}{8}}{2}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)$

используя sin двойного угла.

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0$

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cdot\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\right)=0$

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$

$x-\frac{\pi}{16}=\pi k,\ k\in Z$

$x=\frac{\pi}{16}+\pi k,\ k\in Z$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0$

формула приведения:

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{16}\right)=0$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{16}-x\right)=0$

формула суммы косинусов:

$2\cos\frac{x-\frac{\pi}{16}+\frac{7\pi}{16}-x}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{16}-\frac{7\pi}{16}+x}{2}=0$

$2\cos\frac{3\pi}{16}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ $\quad 2\cos\frac{3\pi}{16}\neq 0$

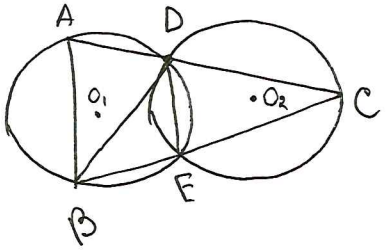
$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

10

④



Дано: $\triangle ABC$, окр $(O_1;4)$, окр $(O_2;R_2)$

окр $(O_1;4)\cap AC=D$

окр $(O_1;4)\cap BC=E$

$BD=5$

$CD=2$

Найти: R_2

Решение: 1) окр O_1 описана около $\triangle BED$

по Th синусов $\frac{BD}{\sin\angle BED}=2R_1$

$\sin\angle BED=\frac{BD}{2R_1}=\frac{5}{2\cdot 4}=\frac{5}{8}$

$\angle DEB$ смежный с $\angle DEC$, шифр

значит $\sin\angle BED = \sin\angle DEC = \frac{5}{8}$

2) В $\triangle DEC$ $\quad \frac{DC}{\sin\angle DEC} = 2R_2$

$$R_2 = \frac{DC}{2\sin\angle DEC} = \frac{2}{2\cdot\frac{5}{8}} = \frac{8}{5}$$

10

Ответ: $\frac{8}{5}$

5) $\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0 \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1;\ x = a;\ x = 2 \\ x = 0;\ x = a;\ x = 3 \end{cases}$

1) $x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geq 0$

$x^3 - ax^2 - 3x^2 + 3ax + 2x - 2a \geq 0$

$x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x - ax^2 + 2ax + ax - 2a \geq 0$

$x^2(x-1) - 2x(x-1) - ax(x-1) + 2a(x-1) \geq 0$

$(x-1)(x^2 - 2x - ax + 2a) \geq 0$

$(x-1)(x(x-a) - 2(x-a)) \geq 0$

$(x-1)(x-a)(x-2) \geq 0$

$x = 1 \quad x = a \quad x = 2$

2) $x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leq 0$

$x^3 - ax^2 - 3x^2 + 3ax \leq 0$

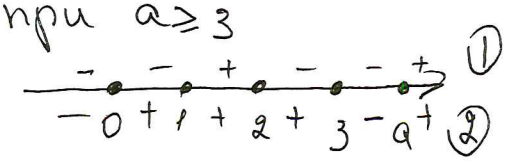
$x^2(x-a) - 3x(x-a) \leq 0$

$x(x-3)(x-a) \leq 0$

$x = 0 \quad x = a \quad x = 3$

а может принимать разные значения, рассмотрим все варианты

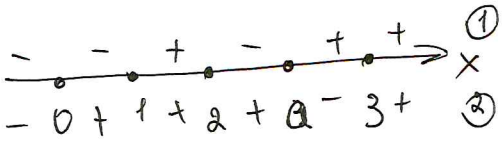
1. при $a \geq 3$



нет случаев когда ① ≥ 0, ② ≤ 0, но при $x=a$ оба неравенства обращаются в 0

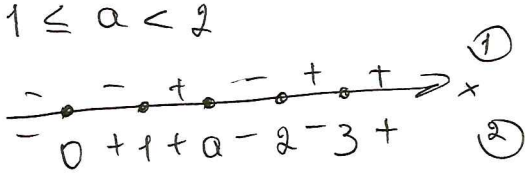
шифр:

2. $2 \le a < 3$



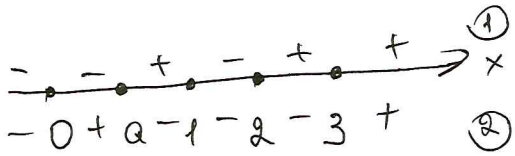
решение на $[2; a]$, но их больше 1

3. $1 \le a < 2$



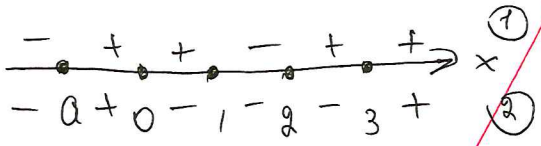
решение на $[2; 3]$, но их больше 1

4. $0 \le a < 1$



решение на $[a; 1]$, $[2; 3]$, но их больше 1

5. $a < 0$



решение на $[0; 1]$; $[2; 3]$ но их больше 1

Ответ: $a \in [3; +\infty)$

верн

1б