**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (10 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**1 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Найдите сумму:

**(7 баллов)**

**Ответ:** .

**Решение:** Поскольку

то, учитывая условие задачи, получаем

**2.** Докажите, что для выполняется неравенство

**(7 баллов)**.

**Решение:** Так как Используя известное неравенство о средних, получим при условии, что то есть Возведем в квадрат последнее неравенство и получим требуемое неравенство Таким образом, неравенство доказано.

**3.** Решите систему уравнений:

**Ответ: (2022, 2, 4), (2018, 0,2).**

**Решение:** Введем замену переменной Тогда система примет вид Преобразуем систему к виду Сделаем замену переменных , , . Тогда система примет вид:

Перемножим уравнения системы и получим , откуда получаем, что

. Используя последнее равенство, получим, что система в итоге имеет два решения: или Тогда или Следовательно,

или В итоге получаем 2 решения системы или

**Замечание:** за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**4.** В магазине «Все для школы» в продаже имеется мел в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 3:4:6. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало 2:5:8. Известно, что число пачек превосходного мела возросло на 80%, а обычного мела − уменьшилось не более чем на 10 пачек. Сколько всего пачек мела было в магазине сначала?

**(7 баллов)**

**Ответ: 260 пачек.**

**Решение:** Пусть *x* исходное число пачек обычного мела, тогда число пачек необычного равно . Так как последнее число целое, то , где . Следовательно, исходные количества пачек всех трех сортов составляют , , соответственно.

После продаж и поставок количество превосходного мела составило , а необычного пачек. Эти числа целые, следовательно, делятся на 4 и 5, то есть , где . Число пачек обычного мела будет равно Учитывая условие задачи (число пачек обычного мела уменьшилось не более чем на 10 пачек), получим Последнему неравенству удовлетворяет лишь одно натуральное число Откуда следует, что .

Таким образом, исходное количество пачек мела в магазине было равным

++.

**5.** Расстояние между центрами и окружностей и равно , а их радиусы равны соответственно и Хорда окружности касается окружности и делится точкой касания в отношении 1:6. Найдите длину этой хорды. **(7 баллов)**

**Ответ:** или

**Решение:** Пусть центр первой окружности, точка *M* точка касания этой окружности с хордой *AB.* Из центра второй окружности проведем  *AB,* где точка *K* середина хорды *AB.* Опустим и рассмотрим три различных случая расположения хорды *AB* и центров и

**1)** Пусть лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* и (рис.4). Так как , то лежит на отрезке Пусть , тогда , , . В прямоугольном имеем В прямоугольном имеем, , откуда получаем, что Учитывая, что , получаем уравнение Решая его, находим Следовательно,

**2)** Пусть по-прежнему лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* (рис.5), но (в частности, может быть , то есть *AB* - диаметр). Следовательно, L лежит на продолжении отрезка , при этом. Выражения для через *x* и *r* сохраняются, а уравнения для нахождения *x* примет вид Решая его, находим Следовательно,

**3)** Пусть лежат по разные стороны относительно прямой *AB* (рис.6). Следовательно, L лежит на продолжении отрезка , при этом. Выражения для через *x* и *r* сохраняются, а уравнения для нахождения *x* примет вид и решений не имеет.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (10 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**2 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Вычислите:

**Ответ:** .

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**2.** Докажите, что для выполняется неравенство

**(7 баллов)**

**Решение:** Так как Используя известное неравенство о средних, получим при условии, что то есть Возведем в квадрат последнее неравенство и получим требуемое неравенство Таким образом, неравенство доказано.

**3.** Решите систему уравнений:

**Ответ:** **(3, 2021, 4), (, 2019,2).**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**Замечание:** за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

**4.** В магазине «Все для школы» в продаже имеется мел в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 2:3:6. После того как в магазин поступило некоторое количество пачек обычного и необычного мела общим числом не более 100 пачек, а 40% от пачек превосходного мела было продано, количественное соотношение изменилось и стало 5:7:4. Сколько всего пачек мела было продано в магазине? **(7 баллов)**

**Ответ: 24 пачки.**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**5.** Расстояние между центрами и окружностей и равно , а их радиусы равны соответственно и Прямая, пересекающая окружность в точках *М* и *N* касается окружности в точке *K*, причем *MN*=2*NK*. Найдите длину хорды *MN* .  **(7 баллов)**

**Ответ:** или

**Решение:**  решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, отличие состоит в том, что возможны 2 случая расположения хорды и окружностей:

1) точка касания с окружностью лежит вне окружности ; 2) точка касания с окружностью лежит внутри окружности

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении. |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |