**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (11 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**1 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Вычислите сумму:

**(7 баллов)**

**Ответ:** .

**Решение:** Используя известную формулу , верную для , получим, что каждый из корней представим в виде:

…

Сложив все эти равенства, имеем

**2.** Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

**(7 баллов)**

**Ответ: 7.**

**Решение:** С помощью формулы преобразуем данную функцию к виду Значения косинуса целиком заполняют промежуток , поэтому множество значений этой функции совпадает с множеством значений квадратичной функции при условии, что . Наименьшее и наибольшее значение находим обоснованно любым способом (графически, через производную, выделением полного квадрата), в результате чего, имеем

, . Таким образом, множество значений функции содержит семь целых чисел: ,,,,,,.

**3.** Решите систему уравнений:

**Ответ: (2 , 2, 1/6), (*x*, 0, 0), (0, *y*, 0),** где ***x*, *y* ─** любые действительные числа.

**Решение:** Из третьего уравнения системы находим , откуда

Следовательно, либо .

1) Пусть , тогда и первое, и второе уравнения сводятся к равенству . Следовательно, либо . Таким образом, решениями являются всевозможные тройки чисел вида (*x*, 0, 0), (0, *y*, 0), где *x*, *y* ─ любые действительные числа.

2) Пусть , . Вычитая из второго уравнения исходной системы удвоенное первое, получим . Так как , то . Учитывая условие , , . После чего из первого или второго уравнения исходной системы находим .

**4.** Пусть А ─ множество всех шестнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняется два условия:оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 1. Докажите, что все числа из множества А четные и множество А содержит более чем чисел.  **(7 баллов)**

**Решение:** Пусть *m* произвольное число из множества А. По условию , где . Предположим, что *a* последняя цифра числа , тогда , где . Следовательно, Сумма оканчивается цифрой 0 и имеет четное число десятков. Для того чтобы в числе цифрой десятков была 1, обязательно должна быть нечетной цифра десятков числа Проверяя все значения , убеждаемся, что это возможно только при и . Следовательно, число *n* четное, а значит четным будет также и число . Таким образом, все числа из множества А четные.

Оценим теперь в каждой сотне последовательно стоящих натуральных чисел количество таких чисел *n*, для которых имеет цифру 1 в разряде десятков. Каждое число *n* можно записать в виде , где , . Возводя в квадрат, имеем

Сумма оканчивается двумя нулями, поэтому цифра в разряде десятков числа *m* совпадает с соответствующей цифрой слагаемого Последней цифрой числа *b* является 4 или 6 (вытекает из предыдущих рассуждений). Тогда условию задачи могут удовлетворять . Рассматривая их квадраты, убеждаемся, что цифра 1 в разряде десятков получается только при. Следовательно, множество A содержит числа вида , , где .

В каждой последовательной сотне натуральных чисел есть четыре числа, квадраты которых имеют цифру 1 в разряде десятков, это числа вида

, ,,, где

По условию задачи или

Отметим, что и в промежутке между числами и существует последовательных сотен натуральных чисел. В каждой из них можно выбрать четыре числа, квадраты которых принадлежат A. Поэтому количество элементов в множестве A не меньше, чем , а это число очевидно больше , что и требовалось доказать.

**5.** Дан куб и две плоскости и . Плоскость перпендикулярна прямой , а плоскость параллельна прямой . Определите наименьший возможный угол между плоскостями и . **(7 баллов)**

**Ответ:**

**Решение:** Докажем сначала одно вспомогательное утверждение. Пусть плоскости и пересекаются по прямой и образуют двугранный угол , точка и , , (рис.7). Следовательно, =, . Пусть *S* ─ произвольно выбранная на точка, то из неравенства имеем =. Следовательно, .

Вернемся к исходной задаче. Проведем плоскости и через точку . Пусть ребро куба равно 1 и *O* точка пересечения диагоналей . Прямая перпендикулярна диагонали и ребру ,поэтому плоскость , то есть совпадает с . Плоскость проходит через прямую следовательно, лежит на ребре двугранного угла, образованного и . Так как , то (рис.8).

Отметим, , , , то есть Как было показано выше, что если ─ двугранный угол между плоскостями и , то Следовательно, Покажем, что угол может быть равным В плоскости через точку проведем прямую *m*, а затем построим плоскость через *m* и прямую . Тогда *m* будет ребром получившегося двугранного угла, а ─ его плоским углом. Следовательно, в этом случае угол между плоскостями и равен , то есть наименьший возможный угол между плоскостями и равен .

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (11 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**2 ВАРИАНТ**

**(ОТВЕТЫ)**

**1.** Вычислите сумму:

**Ответ:** .

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**2.** Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции:

**(7 баллов)**

**Ответ: 8.**

**Решение:** С помощью формулы преобразуем данную функцию к виду Значения косинуса целиком заполняют промежуток , поэтому множество значений этой функции совпадает с множеством значений квадратичной функции при условии, что . Наименьшее и наибольшее значение находим обоснованно любым способом (графически, через производную, выделением полного квадрата), в результате чего, имеем

, . Таким образом, множество значений функции содержит восемь целых чисел:

, ,,,,,,

**3.** Решите систему уравнений:

**Ответ: (2 , 1/3, 3), (*x*, 0, 0), (0, 0, *z*),** где ***x*, *z* ─** любые действительные числа.

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**4.** Пусть В ─ множество всех четырнадцатизначных натуральных чисел, для каждого из которых выполняется два условия:оно является квадратом целого числа и в его десятичной записи в разряде десятков стоит цифра 5. Докажите, что все числа из множества В четные и множество В содержит более чем чисел.

**Решение:** аналогичное решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, тем не менее укажем важное отличие: в каждой последовательной сотне существуют четыре числа, квадраты которых имеют цифру 5 в разряде десятков. Это числа вида , ,,, где

**5.** Все ребра правильной четырехугольной пирамиды с основанием имеют равную длину. Плоскость перпендикулярна прямой , а плоскость параллельна прямой . Определите наименьший возможный угол между плоскостями и .  **(7 баллов)**

**Ответ:**

**Решение:** аналогичное решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, тем не менее отметим для этой задачи следующее: Треугольникпрямоугольный. Пусть плоскость проходит через точку, тогда прямая . Если провести плоскость через прямую и считать, что все ребра равны 1, то длина перпендикуляра, опущенного из *D* на , равна *CD* отрезок, соединяющий *D* и ребро двугранного угла, *CD*=1. Если ─ двугранный угол между плоскостями и , то

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении. |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |