Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

МАТЕМАТИКА

10 класс

II этап

1. В каком году родились люди, которым в 2016 году исполнится столько лет, какова сумма цифр их года рождения?

(7 баллов)

Решение. 1. Пусть их год рождения 19ab, где a, b — цифры соответственно десятков и единиц. Тогда получается уравнение: $2016 = 1900 + 10a + b + 1 + 9 + a + b \Leftrightarrow 106 = 11a + 2b$. Очевидно, a — четная цифра, иначе сумма в последнем равенстве будет нечетной; $0 \le b \le 9$. Если a = 2, 4, 6, то b > 10. Если a = 8, то b = 9, год рождения 1989.
2. Пусть год рождения 20ab. Тогда $2016 = = 2000 + 10a + b + 2 + 0 + a + b$, или $14 = 11a + 2b$, откуда a = 0, b = 7.

Ответ: в 1989 или в 2007.

2. Решить уравнение $\frac{x+13}{x} = ctg 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

(8 баллов)

Ответ: 39.

3. Отмечены вершины и середины сторон правильного десятиугольника (то есть всего отмечено 20 точек). Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

(10 баллов)

Ответ: $C_{20}^{3} - 10 = 1130$

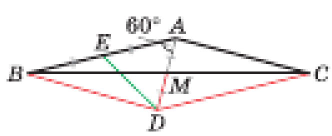
4. Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна 247. Какой номер имеет седьмой дом от угла?

(10 баллов)

5. В треугольнике *ABC* медиана, проведенная из вершины *A* к стороне *BC*, в четыре раза меньше стороны *AB* и образует с ней угол $60°$. Найдите угол *BAC*.

(10 баллов)

Решение. Продлим медиану *AM* на ее длину: *DM* = *AM*, тогда *ABDC* — параллелограмм (см. рис.). В треугольнике *ABD* проведем медиану *DE*, тогда $AE = \frac{1}{2} AB = AD$. Таким образом, треугольник *ADE* — равнобедренный с углом 60°, то есть *ADE* — равносторонний.



Следовательно, в треугольнике ABD медиана DE равна половине стороны AB, к которой она проведена, значит, треугольник ABD прямоугольный ($\angle ADB = 90°$). Тогда

$$\angle CAD = \angle ADB = 90°,$$

$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 150°$.

Ответ: $150°$.

6. Пачка письменных работ школьников содержит не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке с оценкой «отлично». Если убрать три верхние работы, то 48% работ в оставшейся пачке будут с оценкой «отлично». Сколько работ было в пачке?

(15 баллов)

Решение. Пусть x – число работ в пачке, а z – число работ с оценкой «отлично» среди трех верхних. Тогда по условию $\frac{50}{100}\cdot x - z = \frac{48}{100}(x-3)$, $\frac{2}{100}\cdot x = z - \frac{144}{100}$, $x = 50z - 72$.

Так как x и z – натуральные числа, причем $x \leq 75$ то z должно удовлетворять двойному неравенству:

$$1 \leq 50z - 72 \leq 75,$$

откуда $z = 2$, а $x = 28$.

Ответ: 28.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!