Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016гг.

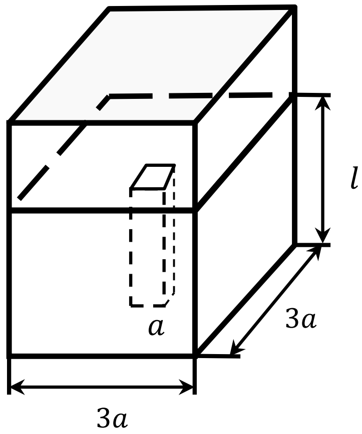
ФИЗИКА (заключительный этап) 8 класс (решения)

8 класс

II этап

1. В стеклянный сосуд прямоугольной формы и квадратным дном со стороной $3\boldsymbol{a}$ вставлен медный стержень квадратного сечения со стороной $\boldsymbol{a}$ и длиной $\boldsymbol{l}$. Затем в сосуд наливают ртуть до уровня стержня. Рассчитайте, во сколько раз изменится сопротивление данной конструкции, если медный стержень вынуть из ртути, но до соприкосновения поверхностей. Удельное сопротивление меди $\boldsymbol{\rho_м} = 0{,}017 \cdot 10^{-6} Ом \cdot м$, ртути $\boldsymbol{\rho_p} = 0{,}958 \cdot 10^{-6} Ом \cdot м$.

Решение:



Параллельное соединение (до вынимания):

$R_м = \rho_м \frac{l}{a^2} R_p = \rho_p \frac{l}{9a^2 - a^2} = \rho_p \frac{l}{8a^2}$ **(2 балла)**

$R_1 = \frac{\rho_м \rho_p l}{a^2(\rho_p + 8\rho_м)}$ **(2 балла)**

Последовательное соединение (после вынимания)

$R_2 = R_м + R_p^{'} R_p^{'} - ?$ **(2 балла)**

Высота ртути в стакане уменьшится до h, объем ртути не изменился.

$V_p = (3a)^2 l - a^2 l = 9a^2 l - a^2 l = 8a^2 l$ **(2 балла)**

$V_p = (3a)^2 h = 9a^2 h$ **(2 балла)**

-это теперь «длина» ртутного проводника.

$$R_p^{'} = \rho_p \frac{h}{(3a)^2} = \frac{\rho_p \frac{8}{9} l}{9a^2}$$

$$R_2 = \rho_м \frac{l}{a^2} + \frac{\rho_p \frac{8}{9} l}{9a^2} = \frac{9\rho_м l + \rho_p \frac{8}{9} l}{9a^2} = \frac{l\left(\rho_м + \frac{8}{9}\rho_p\right)}{9a^2}$$

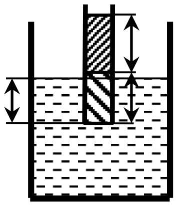
$\frac{R_2}{R_1} = \frac{l\left(\rho_м + \frac{8}{9}\rho_p\right)}{9a^2} \cdot \frac{\rho_p a^2 + 8a^2 \rho_м}{\rho_м \rho_p l} = \frac{\left(\rho_м + \frac{8}{9}\rho_p\right)(\rho_p + 8\rho_м)}{9\rho_м \rho_p}$ **(6 баллов)**

$$\rho_м = 0{,}017 \cdot 10^{-6} Ом \cdot м$$
$$\rho_p = 0{,}958 \cdot 10^{-6} Ом \cdot м$$

$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\left(0{,}017 + \frac{8}{9} 0{,}958\right)(0{,}958 + 8 \cdot 0{,}017)}{9 \cdot 0{,}017 \cdot 0{,}958} = \frac{0{,}869 \cdot 1{,}094}{0{,}147} = 6{,}47 \approx 6{,}5$ **(4 балла)**

Ответ: *в* $6{,}5$ *раз*

2. В сосуд с ртутью плотностью $\boldsymbol{\rho} = 13{,}6 \cdot 10^3\ кг/м^3$ погрузили на $\boldsymbol{h} = 72\ см$ стеклянную трубку, закрытую с одной стороны пластинкой. В трубку необходимо налить последовательно одинакового объема воды (плотностью $\boldsymbol{\rho_1} = 10^3\,кг/м^3$) и масла (плотностью $\boldsymbol{\rho_2} = 0{,}9 \cdot 10^3\,кг/м^3$), чтобы пластинка отпала. Определите высоту воды и масла в трубке.



Решение:

$V_1 = V_2 \quad h_1 = h_2$ (**4** балла)

$\rho g h = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = g h_1(\rho_1 + \rho_2)$ **(4 балла)**

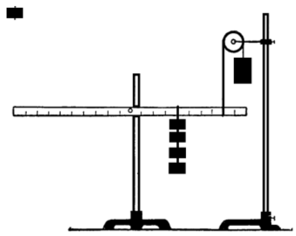
$\rho h = h_1(\rho_1 + \rho_2)$ **(4 балла)**

$h_1 = \frac{\rho h}{\rho_1 + \rho_2}$ **(4 балла)**

$h_1 = \frac{13{,}6 \cdot 10^3}{10^3 + 0{,}9 \cdot 10^3} = 0{,}720$ м **(4 балла)**

Ответ: 0,720 м

3. На рисунке дана установка, в которой равноплечий рычаг нагружен четырьмя одинаковыми грузами по 50 г . Определите массу большого груза, привязанного к верёвке перекинутой через неподвижный блок. Цена деления на рычаге составляет 5 см.



Решение:

$M_1 = M_2$– относительно оси закрепленного рычага **(4 балла)**

$M_1 = (4 \cdot 5см)(4 \cdot 50г)$ **(4 балла)**

$M_2 = (8 \cdot 5\ см) m\ г$ **(4 балла)**

$20 \cdot 200 = 40m$ **(4 балла)**

$m = 100г$ **(4 балла)**

Ответ: 0,1 кг

4. Между г. Томском и г. Тайга расстояние 208км. Пассажир электрички тратит на дорогу 2ч 01мин. Средняя скорость движения электрички $\upsilon = 127{,}3 км/ч$. Какое время занимают остановки?

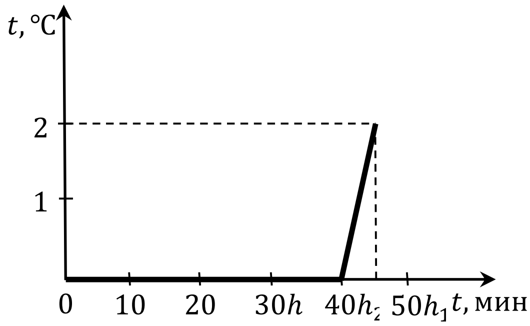
Решение:

$\Delta t = t - \frac{l}{v}$ **(10 баллов)**

$\Delta t = 7260 - \frac{208000}{35{,}37} = 1319{,}3 с = 22 мин$ **(10 баллов)**

Ответ: $22\ мин$

5. В школьной лаборатории проведен эксперимент, в котором представлен график зависимости температуры смеси льда с водой от времени. Сосуд с данной смесью массой 7 кг был внесен в теплое помещение, где сразу же начали проводить измерения. Из графика необходимо определить начальную массу льда в сосуде, если удельная теплота плавления льда $\boldsymbol{\lambda} = 3{,}4{\cdot}10^5\ Дж/кг$, а теплоемкость воды - $\boldsymbol{c} = 4200\ Дж/(кг{\cdot}℃)$.



Решение:

$Q_1 = Pt_1 \quad Q_2 = Pt_2$ $-$ количество тепла, подводимого к сосуду за время t_1и t_2 соответственно.

$P -$ тепловая мощность, которая в помещении постоянна.

С другой стороны, $Q_1 = \lambda m_0$ и $Q_2 = cm\Delta t$

Приравняем соответствующие количества теплоты:

$Pt_1 = \lambda m_0 \quad Pt_2 = cm\Delta t$ **(10 баллов)**

Поделим почленно:

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\lambda m_0}{cm\Delta t}$ **(4 балла)**

И выразим первоначальную массу льда

$$m_0 = \frac{t_1 cm\Delta t}{t_2\lambda}$$

$m_0 = \frac{40{\cdot}4200{\cdot}7{\cdot}2}{5{\cdot}3{,}4{\cdot}10^5} = 1{,}38\ кг$ **(6 баллов)**

Ответ: $1{,}38\ кг$

Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

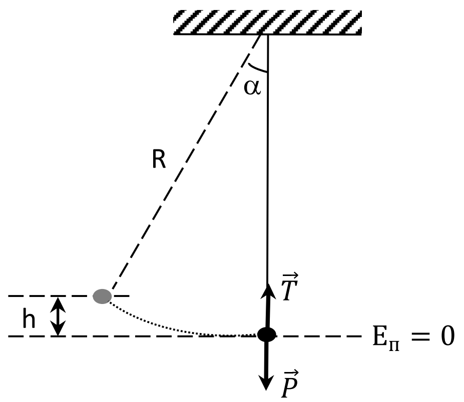
Физика (заключительный этап) 9 класс (решения)

II этап

1. «Давай, пошалим», – сказал Карлсон Малышу, и прыгнул на люстру массой $\boldsymbol{m} = 10$ *кг*, которая висит на цепи и выдерживает максимальную нагрузку в $\boldsymbol{T} = 500$ *Н*. Какой максимально возможный угол отклонения может выдержать цепь люстры при дальнейшем раскачивании, если масса Карлсона $\boldsymbol{M} = 25$ *кг*?

Решение:

Рисунок **(1 балл)**



Так как трение в системе отсутствует, то можно применить закон сохранения механической энергии. В положении 1 на высоте h суммарная механическая энергия ($\upsilon = 0$)

$E_1 = (M + m)gh.$ **(2 балла)**

В положении 2 ($E_п = 0$):

$E_2 = \frac{(M+m)\upsilon^2}{2}.$ **(2 балла)**

$$E_1 = E_2$$

$(M + m)gh = \frac{(M+m)\upsilon^2}{2}.$ **(2 балла)**

Отсюда следует, что $\upsilon^2 = 2gh$.

В положении 2 запишем II закон Ньютона в проекции на направление центростремительного ускорения (к точке подвеса).

$T - P = (M + m)a,$ **(2 балла)**

где $a = \frac{\upsilon^2}{R}$. С учетом этого II закон Ньютона примет вид.

$T - P = (M + m)\frac{\upsilon^2}{R}.$ **(2 балла)**

Заменим здесь $\upsilon^2 = 2gh$:

$T - P = (M + m)\frac{2gh}{R}.$ **(2 балла)**

Отсюда выразим h: $\frac{(T-P)R}{(M+m)2g} = h.$ **(2 балла)**

Из рисунка следует: $\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$, или $\cos\alpha = 1 - \frac{h}{R}.$ **(1 балл)**

Если сюда подставим h, то получим значение косинуса угла α:

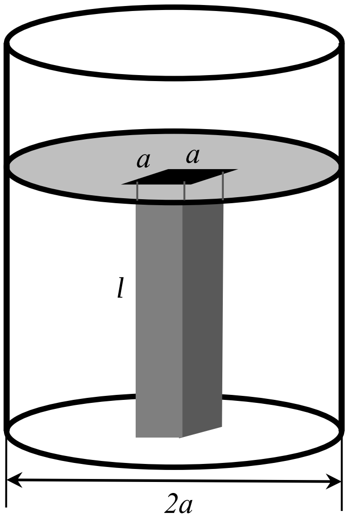
$\cos\alpha = 1 - \frac{T-P}{(M+m)2g} = 1 - \frac{T-(M+m)g}{(M+m)2g}.$ **(2 балла)**

Подставляя численные значения, получаем результат:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{500-(25+10)\cdot 10}{(25+10)\cdot 2\cdot 10} = 0{,}79.$$

$\alpha = \arccos 0{,}79 = 38{,}2°.$ **(2 балла)**

Ответ: $38{,}2°$.



2. В стеклянный сосуд цилиндрической формы и дном диаметра $2\boldsymbol{a}$ вставлен медный стержень квадратного сечения со стороной $\boldsymbol{a}$ и длиной $\boldsymbol{l}$. Затем в сосуд наливают ртуть до уровня стержня. Рассчитайте, во сколько раз изменится сопротивление данной конструкции, если медный стержень вынуть из ртути, но до соприкосновения поверхностей. Удельное сопротивление меди равно $\boldsymbol{\rho_м}$, ртути – $\boldsymbol{\rho_р}$.

Решение:

При погруженном стержне систему можно рассмотреть как параллельное соединение медного и ртутного проводников.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{\text{р}}} + \frac{1}{R_{\text{м}}}$$ **(2 балла)**

Сопротивление медного проводника $R_{\text{м}} = \rho_{\text{м}} \frac{l}{a^2}$. **(2 балла)**

Сопротивление ртутного проводника $R_{\text{р}} = \rho_{\text{р}} \frac{l}{\frac{\pi 4a^2}{4} - a^2} = \rho_{\text{р}} \frac{l}{a^2(\pi-1)}$. **(2 балла)**

Подставим эти значения в закон параллельного соединения

$$\frac{1}{R_1} = \frac{a^2}{\rho_{\text{м}} l} + \frac{a^2(\pi-1)}{\rho_{\text{р}} l} = \frac{a^2\rho_{\text{р}} + a^2\rho_{\text{м}}(\pi-1)}{\rho_{\text{р}}\rho_{\text{м}} l}.$$ **(2 балла)**

Отсюда выразим сопротивление R_1:

$$R_1 = \frac{\rho_{\text{р}}\rho_{\text{м}} l}{a^2\left(\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{м}}(\pi-1)\right)}.$$ **(2 балла)**

Прежде чем найти сопротивление системы после вынимания стержня из ртути, учтем, что уровень ртути упадет, но ее объем останется неизменным. Объем ртути при погруженном стержне:

$$V_{\text{р}} = \frac{\pi 4a^2}{4} \cdot l - a^2 \cdot l = a^2 \cdot l(\pi - 1).$$ **(1 балл)**

Тот же объем ртути, но в отсутствии стержня:

$$V_{\text{р}} = \frac{\pi 4a^2}{4} \cdot h,$$ **(1 балл)**

где h – высота ртути в сосуде после вынимания медного стержня. Приравняем эти объемы и выразим высоту h.

$$a^2 \cdot l(\pi - 1) = \frac{\pi 4a^2}{4} \cdot h$$

$$h = \frac{l(\pi-1)}{\pi}.$$ **(2 балла)**

Сопротивление медного стержня не изменится, так как его геометрические параметры остались прежними. А сопротивление ртути станет

$$R_{\text{р}}' = \rho_{\text{р}} \frac{h}{\frac{\pi 4a^2}{4}} = \rho_{\text{р}} \frac{\frac{l(\pi-1)}{\pi}}{\pi a^2} = \rho_{\text{р}} \frac{l(\pi-1)}{\pi^2 a^2}.$$ **(2 балла)**

При вынимании стержня и приведении его в соприкосновение с ртутью, получаем последовательное соединение разнородных проводников.

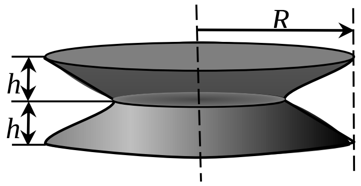
$$R_2 = \rho_{\text{м}} \frac{l}{a^2} + \rho_{\text{р}} \frac{l(\pi-1)}{\pi^2 a^2} = \frac{l\left(\rho_{\text{м}}\pi^2 + \rho_{\text{р}}(\pi-1)\right)}{\pi^2 a^2}.$$ **(2 балла)**

Теперь можно найти отношение сопротивлений согласно условию задачи.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{l\left(\rho_{\text{м}}\pi^2 + \rho_{\text{р}}(\pi-1)\right)}{\pi^2 a^2} \cdot \frac{a^2\left(\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{м}}(\pi-1)\right)}{\rho_{\text{р}}\rho_{\text{м}} l} = \frac{\left(\rho_{\text{м}}\pi^2 + \rho_{\text{р}}(\pi-1)\right)\left(\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{м}}(\pi-1)\right)}{\rho_{\text{р}}\rho_{\text{м}}\pi^2}.$$ **(2 балла)**

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{\left(\rho_{\text{м}}\pi^2 + \rho_{\text{р}}(\pi-1)\right)\left(\rho_{\text{р}} + \rho_{\text{м}}(\pi-1)\right)}{\rho_{\text{р}}\rho_{\text{м}}\pi^2}$.

3. На дне сосуда поместили симметричное тело, выточенное из целого куска пористого вещества с плотностью ρ_0. Высота верхней и нижней частей равна h. Затем в сосуд заливают жидкость с некоторой плотностью ρ_1 до уровня h. После доливают менее плотную жидкость с ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Жидкости несмешиваемые и граница раздела жидкостей не смещается. Выяснилось, что когда верхняя грань тела скрылась под поверхностью второй жидкости, его давление на дно сосуда стало равным нулю. Определите плотность ρ_2 верхней жидкости.



Решение:

Так как давление тела на дно сосуда равно нулю, то оно плавает в двух жидкостях. Это возможно, если вес тела уравновешивается силами Архимеда, то есть:

$$P = F_{A1} + F_{A2}.$$ **(4 балла)**

Распишем все силы.

$$\rho_0 V g = \rho_1 \frac{V}{2} g + \rho_2 \frac{V}{2} g.$$ **(6 баллов)**

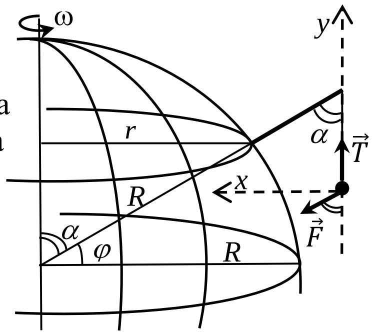
Поделив на объем левую и правую части уравнения, получаем

$$\rho_0 g = \rho_1 \frac{g}{2} + \rho_2 \frac{g}{2}.$$ **(6 баллов)**

$$\rho_2 = 2\rho_0 - \rho_1.$$ **(4 балла)**

Ответ:$\rho_2 = 2\rho_0 - \rho_1$.

4. В научной фантастике описана высадка астронавтов на планету Зига, имеющую массу M и радиус R. Когда они оказались на широте φ, то решили определить направление на центр планеты с помощью отвеса. Однако линия отвеса оказалась параллельна оси вращения планеты. Определите угловую скорость вращения Зиги.



Решение:

рисунок **(4 балла)**

На груз отвеса действуют две силы: $\vec{F}$ – притяжение планеты и $\vec{T}$– натяжения нити. Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F} + \vec{T} = m\vec{a}.$$ **(2 балла)**

В проекциях на оси:

$$ox: F\sin\alpha = ma$$

$$oy: T - F\cos\alpha = 0$$ **(4 балла)**

Учтем, что $a = \omega^2 r = \omega^2 R \sin\alpha$, так как $r = \sin\alpha$. **(2 балла)**

Сила Всемирного тяготения $F = G\frac{mM}{R^2}$. Подставим это в уравнение проекции на ось x.

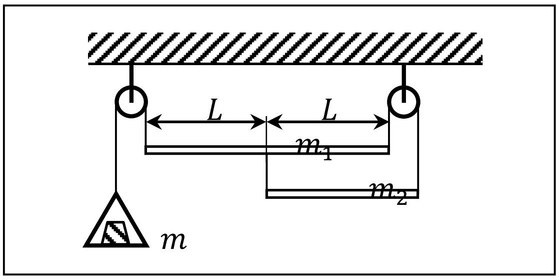
$$G\frac{mM}{R^2}\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha.$$ **(4 балла)**

И выразим из этого уравнения угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}.$$ **(4 балла)**

Ответ:$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}$.

5. Рабочим на стройке необходимо уравновесить систему из двух балок и двух блоков, изображенную на рисунке. Однако выяснилось, что масса m_1 верхней балки неизвестна. Масса нижней балки $m_2 = 100\,кг$. Пренебрегая трением в осях блоков, найдите массу груза m, необходимого для уравновешения системы. Все тросы вертикальны и нерастяжимы.



Решение:

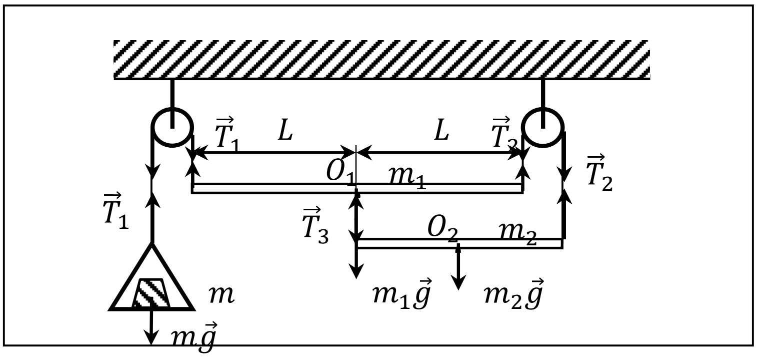


Рисунок **(2 балла)**

Рассмотрим моменты сил относительно точек O_1и O_2:

$$O_1\colon T_1L = T_2L$$

O_2: $T_3l = T_2l$, **(4 балла)**

где $2l$ – длина нижней балки.

Тогда: $T_1 = T_2 = T_3 = T$ (1) **(2 балла)**

Рассмотрим теперь действующие на систему силы:

$$T_1 + T_2 = m_1g + T_3;\ T_3 + T_2 = m_2g \quad (2)$$ **(4 балла)**

Из рисунка видно, что сила натяжения $T_1 = mg$ (3) **(2 балла)**

Подставим выражение (1) в (2) и (3):

$$T = m_1g; 2T = m_2g; T = mg$$ **(2 балла)**

Откуда $2mg = m_2g,\ m = \frac{1}{2}m_2$ **(4 балла)**

Ответ: 50кг

Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

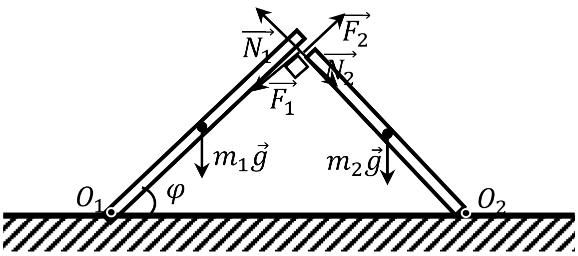
Физика (заключительный этап) 10 класс (решения)

II этап

1. На некотором расстоянии на горизонтальной поверхности стола в точках $\boldsymbol{O_1}$ и $\boldsymbol{O_2}$ закреплены два стержня массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ так, что могут свободно вращаться вокруг этих осей. Верхние концы стержней уложены друг на друга таким образом, чтобы образовался прямой угол. Стержень массы $\boldsymbol{m_1}$ образует угол $\boldsymbol{\varphi}$ с поверхностью стола. Определите коэффициент трения между стержнями, при котором стержень массы $\boldsymbol{m_2}$ не упадет.

Решение:

Расставим силы, действующие на стержни: **(3 балла)**



F_1 и F_2 – силы трения, действующие на соответствующие стержни.
N_1 и N_2 – силы реакции опоры со стороны каждого стрежня

На концы O_1 и O_2 действуют силы реакции опоры со стороны шарниров. Но направления этих сил нам пока неизвестны. Поэтому оси вращения для моментов сил выберем в O_1 и O_2. Тогда

$$m_1 g \frac{l_1}{2}\cos\varphi - N_1 l_1 = 0 \qquad \textbf{(3 балла)}$$

l_1- длина стержня массой m_1.

Тогда $N_1 = \frac{m_1 g}{2}\cos\varphi$.

И $m_2 g \frac{l_2}{2}\sin\varphi - F_2 l_2 = 0$, где l_2- длина стержня массой m_2. **(4 балла)**

$\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right|$ согласно третьему закону Ньютона. Тогда

$$F_1 = \frac{m_1 g}{2}\sin\varphi \qquad \textbf{(3 балла)}$$

т.к. стержни покоятся, то $\mathrm{F}_1 \le \mu N_1$. **(3 балла)**

Значит,

$$\mu = \frac{F_1}{N_1} = \frac{m_2 g}{2}\sin\varphi \cdot \frac{2}{m_1 g\cos\varphi} = \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m_2}{m_1}tg\varphi \qquad \textbf{(4 балла)}$$

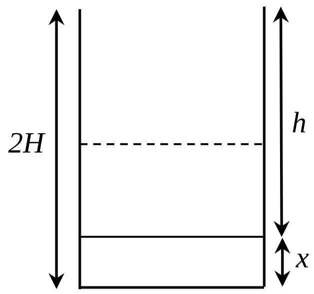
Ответ: $\mu = \frac{m_2}{m_1}tg\varphi$

2. В цилиндрический вертикальный сосуд высотой $2\boldsymbol{H}$ и площадью сечения $\boldsymbol{S}$, разделенного пополам невесомым тонким подвижным поршнем медленно наливают

жидкость с плотностью $\boldsymbol{\rho}$. Какой объем будет у воздуха под поршнем при максимально возможном уровне жидкости, налитом в сосуд? Жидкость под поршень не проникает, внешнее атмосферное давление равно $\boldsymbol{p_0}$.

Решение:

Процесс происходит без изменения температуры (так как медленно).



$$pV = const, T = const$$ **(2 балла)**

Приравняем произведения начального давления и начального обема воздуха к конечным значениям давления и объема той же массы воздуха под поршнем:

$$p_1V_1 = p_2V_2, p_1 = p_0, V_1 = HS$$ **(2 балла)**

Конечное давление под слоем жидкости высотой h:

$$p_2 = p_0 + \rho gh$$ **(2 балла)**

Соответствующий объем воздуха после наливания жидкости до краев сосуда:

$$V_2 = (2H - h)S, x = 2H - h$$ **(2 балла)**

Подставим все значения в закон Бойля-Мариотта:

$$p_0HS = (p_0 + \rho gh)(2H - h)S$$

$$p_0H = 2p_0H - p_0H + \rho gh2H - \rho gh^2$$

$$\rho gh^2 + h(p_0 - \rho g2H) - p_0H = 0$$ **(4 балла)**

Дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = (p_0 - \rho g2H)^2 + 4\rho gp_0H = p_0^2 - 4p_0\rho gH + \rho^2g^24H^2 + 4p_0\rho gH = p_0^2 + \rho^2g^24H^2$$

(2 балла)

И корни квадратного уравнения:

$$h = \frac{\rho g2H - p_0 \pm \sqrt{p_0^2 + \rho^2g^24H^2}}{2\rho g}$$ **(2 балла)**

Решением будет только корень с «+», так как отрицательное значение высоты нам не подходит. Подставим это значение в объем:

$$V_2 = Sx = S\left(2H - \frac{\rho g2H - p_0 + \sqrt{p_0^2 + \rho^2g^24H^2}}{2\rho g}\right)$$ **(4 балла)**

Ответ: $V_2 = S\left(2H - \frac{\rho g2H - p_0 + \sqrt{p_0^2 + \rho^2g^24H^2}}{2\rho g}\right)$

3. Некоторую часть идеального газа выпустили из баллона. В результате показания температуры уменьшились в $\boldsymbol{n}$ раз, а давление понизилось в $\boldsymbol{k}$ раз. Определите оставшуюся в данном сосуде долю газа ($\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m_0}}$)?

Решение:

Из уравнения Менделеева-Клайперона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем:

$$pV = \frac{m_0}{\mu} RT - до \qquad (1)$$

$$\frac{p}{k} V = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{n} - после \qquad (2)$$ **(10 баллов)**

Разделим (2) на (1)

$$\frac{\frac{p}{k}V}{pV} = \frac{\frac{m}{\mu}R\frac{T}{n}}{\frac{m_0}{\mu}RT}$$ **(5 баллов)**

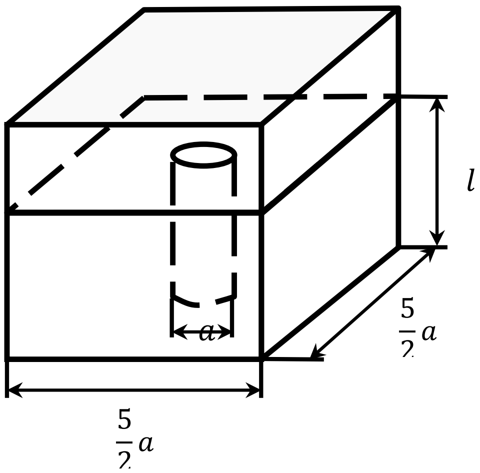
$$\frac{1}{k} = \frac{m}{m_0} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{n}{k}$$ **(5 баллов)**

Ответ: $\frac{m}{m_0} = \frac{n}{k}$

4. В стеклянный сосуд прямоугольной формы и квадратным дном со стороной $\frac{5}{2}\boldsymbol{a}$ вставлен медный стержень круглого сечения диаметром $\boldsymbol{a}$ и длиной $\boldsymbol{l}$. Затем в сосуд наливают ртуть до уровня стержня. Рассчитайте, во сколько раз изменится сопротивление данной конструкции, если медный стержень вынуть из ртути, но до соприкосновения поверхностей. Удельное сопротивление меди $\boldsymbol{\rho_м}$, ртути $\boldsymbol{\rho_p}$.

Решение:



При погруженном стержне систему можно рассмотреть как параллельное соединение медного и ртутного проводников.

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_м} + \frac{1}{R_p}, R_м = \rho_м \frac{l}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{\rho_м l4}{\pi a^2}$ -сопротивление медного проводника. **(2 балла)**

Сопротивление ртутного проводника

$$R_p = \frac{\rho_p l}{\left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\rho_p l4}{25a^2}$$ **(2 балла)**

Подставим эти значения в закон параллельного соединения

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\pi a^2}{\rho_м 4l} = \frac{\rho_p \pi a^2 + \rho_м 25a^2}{\rho_м \rho_p 4l} = \frac{a^2(\rho_p \pi + \rho_м 25)}{\rho_м \rho_p 4l}$$

Отсюда выразим сопротивление R_1:

$$R_1 = \frac{\rho_м \rho_p 4l}{a^2(\rho_p\pi + \rho_м 25)}$$ **(2 балла)**

Объем ртути при погруженном стержне:

$$V_p = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 l - \frac{\pi a^2}{4} l = a^2 l\left(\frac{25}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2 l}{4}(25 - \pi)$$ **(1 балл)**

Тот же объем ртути, но в отсутствии стержня:

$$V_p = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 h = \frac{25a^2}{4} h$$ **(1 балл)**

где h – высота ртути в сосуде после вынимания медного стержня. Приравняем эти объемы и выразим высоту h.

$$\frac{a^2 l}{4}(25 - \pi) = \frac{25a^2}{4} h$$

$$l(25 - \pi) = 25h$$

$$h = \frac{l(25 - \pi)}{25}$$ **(2 балла)**

При вынимании стержня и приведении его в соприкосновение с ртутью, получаем последовательное соединение разнородных проводников.

$$R_2 = R_м + R_p',$$ **(2 балла)**

Сопротивление медного стержня не изменится, так как его геометрические параметры остались прежними. А сопротивление ртути станет

$$R_p' = \frac{\rho_p h}{\left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\rho_p l(25 - \pi)}{25} \cdot \frac{4}{25a^2}$$ **(4 балла)**

$$R_2 = \frac{\rho_м 4l}{\pi a^2} + \frac{\rho_p l(25 - \pi)4}{25 \cdot 25a^2} = \frac{\rho_м l 4 \cdot 625 + \rho_p l(25 - \pi) \cdot 4\pi}{625\pi a^2}$$

$$= \frac{4l(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi a^2}$$

(2 балла)

Теперь можно найти отношение сопротивлений согласно условию задачи.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{4l(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi a^2} \cdot \frac{a^2(\rho_p\pi + 25\rho_м)}{4l\rho_м\rho_p} = \frac{(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi} \cdot \frac{\rho_p\pi + 25\rho_м}{\rho_м\rho_p}$$

(2 балла)

Ответ: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{(625\rho_м + \rho_p(25 - \pi)\pi)}{625\pi} \cdot \frac{\rho_p\pi + 25\rho_м}{\rho_м\rho_p}$

5. Из детского пневматического пистолета выпущена сферическая пулька со скоростью $\boldsymbol{\upsilon} = 12\ м/с$ строго горизонтально у края двух вертикальных стен, отстоящих друг от друга на расстоянии $\boldsymbol{S} = 2\,м$. Высота стен $\boldsymbol{h} = 5\,м$. Определите возможное количество ударов пульки о стены.

Решение:

Так как горизонтальная составляющая скорости постоянна, время, за которое пулька долетит от стенки до стенки, будет равно

$$t_1 = \frac{S}{\upsilon}.$$ **(4 балла)**

Между стенами тело свободно падает вниз с ускорением свободного падения и высоты h за время t:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$ **(4 балла)**

Число ударов о стенки равно отношению времен

$$n = \frac{t}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}}{\frac{S}{\upsilon}} = \frac{\upsilon}{S}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$ **(8 баллов)**

Подставляя численные значения, получим

$$n = \frac{12}{2}\sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} = 6$$ **(4 балла)**

Ответ: $n = 6$

Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

Физика (заключительный этап) 11 класс (решения)

2 этап

Вариант 1

1. Перед студентом стоит задача: перемотать ленту с одной катушки на другую так, чтобы линейная скорость движения ленты всегда была одинакова и равна ***v***. Радиус каждой катушки ***R***, толщина ленты ***d*** (***d***<<***R***). В начальный момент времени вся лента намотана на одну из катушек. Помогите студенту определить, как он должен изменять со временем угловую скорость вращения катушки, на которую наматывается лента.

Решение:

Для того, чтобы линейная скорость ленты была постоянна, необходимо, чтобы в любой момент времени выполнялось равенство:

$$\omega r = v. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Явный вид зависимости радиуса катушки с намотанной лентой от времени проще всего найти из следующих соображений: пусть через время *t* после начала движения радиус катушки с намотанной лентой равен *r*. Тогда на катушке намотана лента объемом

$$V = \pi\left(r^2 - R^2\right)\cdot l, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где *l* – ширина ленты.

В то же время этот же объем ленты прошел мимо некоторой неподвижной точки со скоростью *v*, поэтому

$$V = vtld. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Приравнивая эти выражения, находим

$$r(t) = \sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Тогда угловая скорость вращения передней

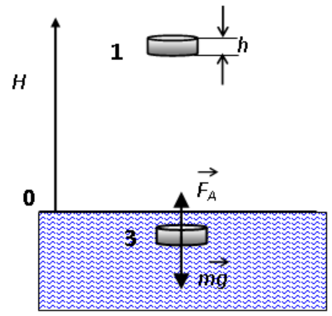
$$\omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: $\boxed{\omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 + \frac{vtd}{\pi}}}}$

2. Цилиндрическая шайба высотой ***h*** плашмя падает в воду. Плотность шайбы ρ < ρ₀ (ρ₀ – плотность воды). С какой высоты должна падать шайба, чтобы она полностью скрылась под водой? Чему будет равен после этого период колебаний шайбы? Трением пренебречь.

Решение:

Работа всех сил (mg и F_A) на пути 1-3 равна приращению энергии на пути 1-3, т.к. скорость в точке 1 и 3 равна нулю, то



$$A_{13} = \Delta E_k = 0.$$ **(1 балл)**

Работа на пути 1-3

$$A_{13} = A_{mg} + A_{F_A} = 0,$$

$$A_{mg} = -A_{F_A},$$ **(1 балл)**

Работа по погружению шайбы против силы Архимеда

$$A = \int_0^h F_A dx = \int_0^h \rho_0 S x\, g\, dx = \rho_0 S \frac{h^2}{2} g = \rho_0 S h \frac{h}{2} g = \frac{1}{2}\rho_0 V h g,$$ **(1 балл)**

На это и пойдет потенциальная энергия:

$$A = U,$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 V h g = mg\left(H + h\right), \text{ считая } h \ll H$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 V h g = mgH,$$

$$\frac{1}{2}\rho_0 V h g = \rho V g H,$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho} h}.$$ **(2 балла)**

Колебания шайбы будут происходить под действием силы Архимеда:

$$F_A = \rho_0 V g = \rho_0 S x g.$$ **(1 балл)**

В равновесии $F_A = mg, \quad \rho_0 S x_0 g = mg.$ **(1 балл)**

При погружении на x уравнение движения шайбы:

$$ma = mg - F_A,$$ **(1 балл)**

$$\rho S h\, \ddot{x} = mg - \rho_0 S\left(x_0 + x\right) g = mg - \rho_0 S x_0 g - \rho_0 S x g = -\rho_0 S x g,$$ **(3 балла)**

$$\rho h\, \ddot{x} + \rho_0 x g = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0 g}{\rho h} x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}.$$ **(3 балла)**

Период колебаний шайбы:

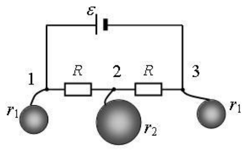
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда период колебаний шайбы:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}}}.$$ **(1 балл)**

Ответ: $\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}h}$, $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{\rho_0 g}}}$

3. К точкам 1, 2, 3 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.



Решение:

После подсоединения к цепи на шарах образуются заряды Q_1, Q_2 и Q_3. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на соединительных проводах и электрической цепи мал, то

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0. \qquad (1)$$ **(2 балла)**

Найдем разность потенциалов между точками 1 и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r_1} = \frac{\varepsilon}{2}.$$ **(3 балла)**

Потенциал в точке 2 равен нулю, тогда

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 0.$$ **(2 балла)**

Из закона сохранения заряда (1) получаем

$$Q_1 + 0 + Q_3 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = -Q_3.$$ **(2 балла)**

Разность потенциалов между точками 1 и 3:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r_1} = \varepsilon,$$ **(2 балла)**

$$\varphi_1 - \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} = \varepsilon$$ **(2 балла)**

$$\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad Q_1 = 2\pi\varepsilon_0 r\varepsilon.$$ **(2 балла)**

Ответ: $Q_2 = 0$, $\quad Q_1 = -Q_3 = 2\pi\varepsilon_0 r_1\varepsilon$.

4. Ныряльщик в солнечный день, находится в море на глубине $\boldsymbol{h}$. При этом он видит в водном «зеркале» над собой отражение участков дна, находящихся от него на расстоянии $\boldsymbol{s}$ и более. Какова глубина $\boldsymbol{H}$ моря в этом месте? Показатель преломления воды $\boldsymbol{n}$. Дно считать ровным, горизонтальным, а глубину моря постоянной.

Решение:

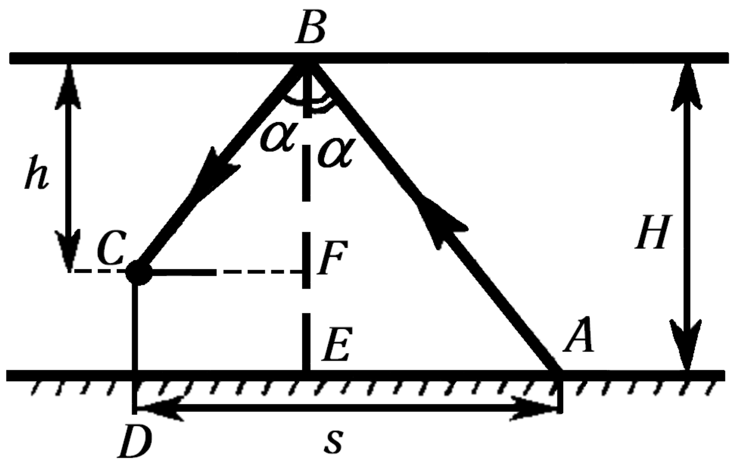


рисунок **(2 балла)**

Луч AB падает на границу «вода-воздух» под углом α, соответствующим предельному углу полного внутреннего отражения. При углах падения меньше чем α, лучи будут выходить в воздух. **(2 балла)**

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{1}{n}$. (1) **(1 балл)**

Расстояние $s = AE + DE$.

Из прямоугольных треугольников ΔAEB и ΔBFC ($CF = DE$):

$$tg\alpha = \frac{DE}{BF} = \frac{AE}{BE}.$$ **(2 балла)**

Учтём, что $BF = h$, $BE = H$. Тогда:

$$s = Htg\alpha + htg\alpha = (H + h)\cdot tg\alpha \quad (2)$$ **(4 балла)**

Распишем $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$. **(1 балл)**

С учётом (1): $tg\alpha = \dfrac{1/n}{\sqrt{1-1/n^2}} = \dfrac{1/n}{1/n\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ **(1 балл)**

Из (2): $H = \dfrac{s}{tg\alpha} - h = s\sqrt{n^2-1} - h$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{H = s\sqrt{n^2-1} - h}$

5. Проводящий контур, состоящий из неподвижных полукольца радиуса $\boldsymbol{L}$, отрезка $\boldsymbol{OA}$ и подвижного стержня $\boldsymbol{OC}$, помещён в однородное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное плоскости контура (рисунок). Стержень $\boldsymbol{OC}$ имеет сопротивление $\boldsymbol{R}$ и может без трения скользить по полуокружности, вращаясь относительно точки $\boldsymbol{O}$. Сопротивления остальных участков контура пренебрежимо малы. Определите минимальное значение силы $\boldsymbol{F}$, которую нужно приложить к стержню в точке $\boldsymbol{C}$, чтобы он вращался с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

Решение:

1. Определим площадь контура *AOCA* для любого момента времени как функцию угла $\angle AOC = \varphi$: $S = \dfrac{\varphi L^2}{2}$ **(4 балла)**

2. Изменение площади контура за промежуток времени Δt

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \cdot \frac{L^2}{2} = \omega \cdot \frac{L^2}{2},$$ **(2 балла)**

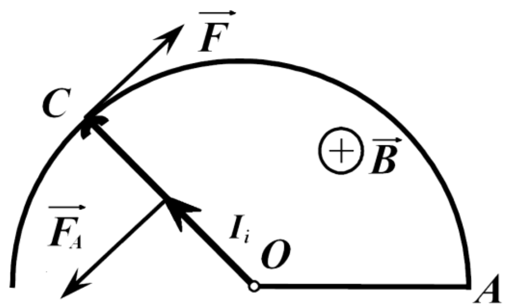
вызывает изменение магнитного потока и возникновение ЭДС индукции:

$$|\varepsilon| = B \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = B\omega \cdot \frac{L^2}{2}.$$ **(2 балла)**

3. По закону Ома для участка цепи, сила тока в стержне *OC* равна:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BL^2}{2R}\omega.$$ **(2 балла)**

4. На стержень с током со стороны магнитного поля действует сила ампера, приложенная к центру стержня ($\sin\alpha = 1$) и направленная против движения стержня (правило Ленца + «правило левой руки») (см. рисунок): **(2 балла)**



$$F_A = IBL = \frac{B^2L^3}{2R}\omega.$$ **(2 балла)**

5. Условие равномерного вращения стержня – равенство моментов сил F и F_A:

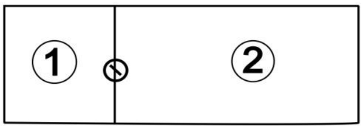
$$F \cdot L = F_A \cdot \frac{L}{2} = \frac{B^2L^3}{2R}\omega \cdot \frac{L}{2}.$$ **(4 балла)**

Откуда, найдём минимальное значение силы F:

$$F = \frac{B^2L^3}{4R}\omega.$$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{F = \dfrac{B^2L^3\omega}{4R}}$

6. Имеется сосуд, содержащий два отсека с клапаном на перегородке, причем объем одного отсека в 3 раза меньше другого. Конструкция клапана такова, что он открывается, если разность давлений превышает определенную величину $\boldsymbol{p}$, остается открытым в течение времени, достаточного для установления теплового равновесия во всем сосуде, а потом закрывается. Первоначально в обоих отсеках находится идеальный одноатомный газ при давлении $\boldsymbol{p}$ и температуре $\boldsymbol{T}$. Газ в меньшем отсеке начинают нагревать до тех пор, пока не откроется клапан. Затем нагрев прекращают и возобновляют его, после того, как клапан закроется. Какова будет температура газа, когда клапан закроется в четвертый раз?



Решение:

1. Первое открывание: в соответствии с законом Шарля

$P1_1 = 2P \quad T1_1 = 2T$, **(2 балла)**

где $P1_1, T1_1$ - давление и температура в первом отсеке в момент открывания клапана.

В соответствии с законом сохранения энергии:

$$\frac{3}{2}\nu RT1_1 + \frac{3}{2}\cdot 3\nu RT = \frac{3}{2}\cdot 4\nu RT(1) => 2T + 3T = 4T(1) => T(1) = \frac{5}{4}T =>$$

$=> P(1) = \frac{5}{4}P$, где $P(1), T(1)$ - давление и температура после закрывания клапана.

(6 баллов)

2. Второе открывание. Аналогично п. 1:

$P1_2 = \frac{9}{4}P; \quad T1_2 = \frac{9}{4}T,$ **(1 балл)**

где $P1_2, T1_2$ - давление и температура в первом отсеке в момент второго открывания клапана.

$$T1_2 + 3T(1) = 4T(2) => \frac{9}{4}T + \frac{15}{4}T = 4T(2) => T(2) = \frac{3}{2}T =>$$

$=> P(2) = \frac{3}{2}P$, где $P(2), T(2)$ - давление и температура после второго закрывания клапана

(3 балла)

3. Третье открывание. Аналогично пп.1,2:

$P1_3 = \frac{5}{2}P \qquad T1_3 = \frac{5}{2}T,$ **(1 балл)**

где $P1_3, T1_3$ - давление и температура в первом отсеке в момент третьего открывания клапана.

$$T1_3 + 3T(2) = 4T(3) => \frac{5}{2}T + \frac{9}{2}T = 4T(3) => T(3) = \frac{7}{4}T =>$$

$=> P(3) = \frac{7}{4}P$, где $P(3), T(3)$ - давление и температура после второго закрывания клапана

(3 балла)

4. Четвёртое открывание. Аналогично пп. 1-3:

$$P1_4 = \frac{11}{4} P \quad T1_4 = \frac{11}{4} T,$$ **(1 балл)**

где $P1_4, T1_4$, давление и температура в первом отсеке в момент четвертого открывания клапана.

$$T1_4 + 3T(3) = 4T(4) => \frac{11}{4} T + \frac{21}{4} T = 4T(4) => T(4) = 2T$$ **(3 балла)**

Ответ: $2T$

Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2015-2016
Физика (заключительный этап) 11 класс (решения)

2 этап

Вариант 2

1. Перед студентом стоит задача: перемотать ленту с одной катушки на другую так, чтобы угловая скорость вращения катушки, на которую наматывается лента, всегда была одинакова и равна $\boldsymbol{\omega}$. Радиус каждой катушки $\boldsymbol{R}$, толщина ленты $\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d} \ll \boldsymbol{R}$). В начальный момент времени вся лента намотана на одну из катушек. Помогите студенту определить, как будет изменяться со временем линейная скорость движения ленты.

Решение:

В любой момент времени будет выполняться равенство:

$$\omega r = v\,. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Явный вид зависимости радиуса катушки с намотанной лентой от времени проще всего найти из следующих соображений: за один полный оборот катушки радиус увеличивается на толщину ленты $\boldsymbol{d}$. Тогда в любой момент времени

$$r(t) = R + Nd\,, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

где N – число оборотов катушки, которое может быть найдено как

$$N(t) = \frac{\omega}{2\pi}\cdot t \qquad \textbf{(3 балла)}$$

В итоге, временная зависимость радиуса катушки с намотанной лентой:

$$r(t) = R + \frac{\omega}{2\pi}\cdot d\cdot t \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Тогда линейная скорость движения ленты

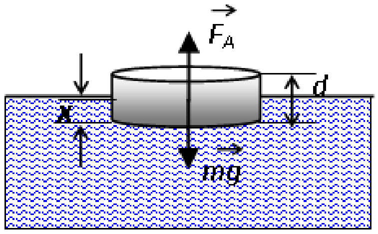
$$v(t) = \omega\left(R + \frac{\omega}{2\pi}\cdot d\cdot t\right) \qquad \textbf{(3 балла)}$$

Ответ: $\boxed{v(t) = \omega\left(R + \frac{\omega}{2\pi}\cdot d\cdot t\right)}$

2. Цилиндрическая шайба толщиной $\boldsymbol{d}$ плашмя падает в воду с некоторой высоты и полностью скрывается под водой. После этого она начинает совершать малые колебания с периодом $\boldsymbol{T}$ в вертикальной плоскости. Чему равна плотность шайбы ρ? Известно, что $\rho < \rho_0$ (ρ_0 – плотность воды). Трением пренебречь.

Решение:

Колебания шайбы будут происходить под действием силы Архимеда:



$$F_A = \rho_0 V g = \rho_0 S x_0 g .$$ **(1 балл)**

В равновесии $F_A = mg, \quad \rho_0 S x_0 g = mg$. **(1 балл)**

При погружении на x уравнение движения шайбы:

$$ma = mg - F_A,$$ **(1 балл)**

$$\rho S d\,\ddot{x} = mg - \rho_0 S\left(x_0 + x\right) g = mg - \rho_0 S x_0 g - \rho_0 S x g = -\rho_0 S x g,$$ **(3 балла)**

$$\rho d\,\ddot{x} + \rho_0 x g = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0 g}{\rho d} x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho d}}.$$ **(3 балла)**

Период колебаний шайбы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

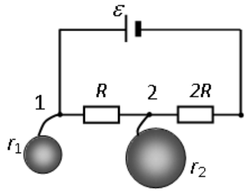
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho d}},$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\rho_0 g}{\rho d},$$

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0 T^2 g}{4\pi^2 d}}.$$ **(6 баллов)**

Ответ: $\boxed{\rho = \frac{\rho_0 T^2 g}{4\pi^2 d}}$

3. К точкам 1 и 2 электрической цепи, изображенной на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами r_1 и r_2 соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.



Решение.

После подсоединения к цепи на шарах образуются заряды Q_1 и Q_2. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на соединительных проводах и электрической цепи мал, то

$$Q_1 + Q_2 = 0. \qquad (1)$$

Отсюда следует $Q_1 = -Q_2$ **(2 балла)**

Найдем разность потенциалов между точками 1 и 2 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_1, \quad U_1 = IR.$$ **(2 балла)**

По закону Ома ток в цепи:

$$I=\frac{\varepsilon}{R+2R}=\frac{\varepsilon}{3R},$$ **(2 балла)**

тогда $U_1=\frac{\varepsilon}{3R}R=\frac{\varepsilon}{3}$, **(2 балла)**

следовательно, разность потенциалов между точками 1 и 2:

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{\varepsilon}{3}.$$ **(1 балл)**

Потенциалы шаров:

$$\varphi_1=k\frac{Q_1}{r_1} \text{ и } \varphi_2=k\frac{Q_2}{r_2}.$$ **(2 балла)**

$$k\frac{Q_1}{r_1}-k\frac{Q_2}{r_2}=k\frac{Q_1}{r_1}+k\frac{Q_1}{r_2}=kQ_1\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=kQ_1\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}=\frac{\varepsilon}{3},$$ **(2 балла)**

отсюда заряд первого шара:

$$Q_1=\frac{\varepsilon r_1r_2}{3k\left(r_1+r_2\right)}=\frac{4\pi\varepsilon_0r_1r_2\varepsilon}{3\left(r_1+r_2\right)}.$$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{Q_1=-Q_2=\frac{4\pi\varepsilon_0r_1r_2\varepsilon}{3\left(r_1+r_2\right)}}$.

4. Пловец в солнечный день, плавает в пруду, глубина которого ***H***. При этом он видит в водном «зеркале» над собой отражение участков дна, находящихся от него на расстоянии ***s*** и более. На какой глубине ***h*** он находится, если считать глубину пруда постоянной, а дно ровным и горизонтальным. Показатель преломления воды ***n***.

Решение:

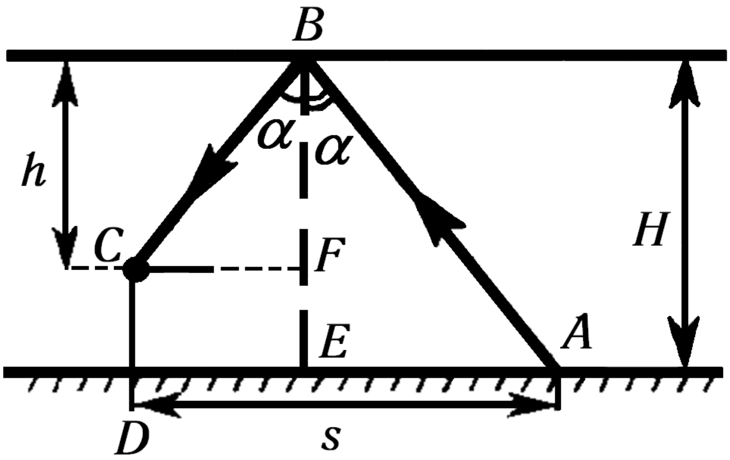


рисунок **(2 балла)**

Луч AB падает на границу «вода-воздух» под углом α, соответствующим предельному углу полного внутреннего отражения. При углах падения меньше чем α, лучи будут выходить в воздух. **(2 балла)**

Тогда $\sin\alpha=\frac{1}{n}$. (1) **(1 балл)**

Расстояние $s=AE+DE$.

Из прямоугольных треугольников ΔAEB и ΔBFC ($CF=DE$):

$$tg\alpha=\frac{DE}{BF}=\frac{AE}{BE}.$$ **(2 балла)**

Учтём, что $BF=h$, $BE=H$. Тогда:

$$s=Htg\alpha+htg\alpha=\left(H+h\right)tg\alpha$$ (2) **(4 балла)**

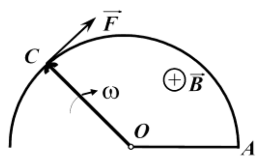
Распишем $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$. **(1 балл)**

С учётом (1): $tg\alpha = \frac{1/n}{\sqrt{1-1/n^2}} = \frac{1/n}{1/n\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ **(1 балл)**

Из (2): $h = \frac{s}{tg\alpha} - H = s\sqrt{n^2-1} - H$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{h = s\sqrt{n^2-1} - H}$

5. Проводящий контур, состоящий из неподвижных полукольца радиуса $\boldsymbol{L}$, отрезка $\boldsymbol{OA}$ и подвижного стержня $\boldsymbol{OC}$, помещён в однородное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное плоскости контура (см. рисунок). Стержень $\boldsymbol{OC}$ может без трения скользить по полуокружности, вращаясь относительно точки $\boldsymbol{O}$. В точке $\boldsymbol{C}$ к стержню приложена постоянная сила $\boldsymbol{F}$. Определите минимальное значение сопротивления стержня $\boldsymbol{OC}$ $\boldsymbol{R}$, при котором стержень будет вращаться с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Сопротивления остальных участков контура считать пренебрежимо малыми.



Решение:

1. Определим площадь контура *AOCA* для любого момента времени как функцию угла $\angle AOC = \varphi$:

$$S = \frac{\varphi L^2}{2}$$ **(4 балла)**

2. Изменение площади контура за промежуток времени Δt

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{L^2}{2} = \omega\cdot\frac{L^2}{2},$$ **(2 балла)**

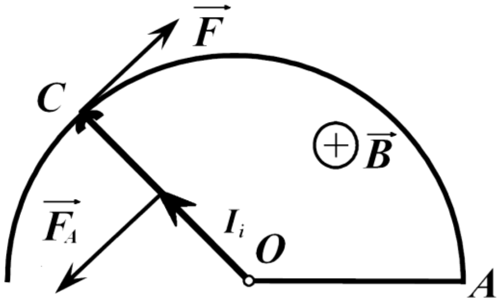
вызывает изменение магнитного потока и возникновение ЭДС индукции:

$$|\varepsilon| = B\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\omega\cdot\frac{L^2}{2}.$$ **(2 балл)**

3. По закону Ома для участка цепи, сила тока в стержне *OC* равна:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BL^2}{2R}\omega.$$ **(2 балл)**

4. На стержень с током со стороны магнитного поля действует сила ампера, приложенная к центру стержня ($sin\ \alpha = 1$) и направленная против движения стержня (правило Ленца + «правило левой руки») (см. рисунок): **(2 балла)**



$$F_A = IBL = \frac{B^2L^3}{2R}\omega .$$ **(2 балл)**

5. Условие равномерного вращения стержня – равенство моментов сил F и F_A:

$$F \cdot L = F_A \cdot \frac{L}{2} = \frac{B^2L^3}{2R}\omega \cdot \frac{L}{2} .$$ **(4 балла)**

Отсюда получим $R = \dfrac{B^2L^3}{4F}\omega$ **(2 балл)**

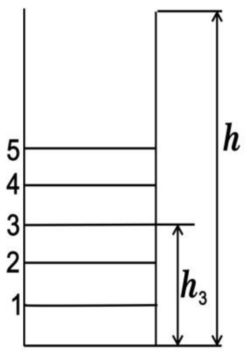
Ответ: $\boxed{R = \dfrac{B^2L^3}{4F}\omega}$

6. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты $\boldsymbol{h}$, изготовленный из металла. Сначала в него опускают один поршень, через большой промежуток времени - второй и так далее - всего 5 поршней. Найдите высоту, на которой будет находиться третий поршень. Масса каждого поршня и атмосферное давление $\mathbf{p_0}$ связаны соотношением $\boldsymbol{mg = p_0 S}$, где $\boldsymbol{S}$ - площадь сечения цилиндра. Толщина поршней мала по сравнению с высотой сосуда. Трение мало.

Решение:

1. Т.к. процесс происходит в металлическом цилиндре и медленно => T = const и для каждой порции газа выполняется закон Бойля-Мариотта: PV=const. Т.к. V = lS и

S = const => Pl = const. **(2 балла)**



2. На каждом поршне, чтобы он не падал, должен существовать перепад давление p_0(исходя из условия). Тогда под 5 поршнем будет $2p_0$, под 4 - $3p_0$, под 3 - $4p_0$, под 2 - $5p_0$, под 1- $6p_0$
(2 балла)

3.Когда опускали 1 поршень, воздух занимал высоту h. Когда поршень опустился – давление увеличилось до $2p_0$(должен быть перепад p_0)

По закону Бойля-Мариотта

$$p_0 h = 2p_0 l => l = \frac{h}{2}$$ **(2 балла)**

4. Когда опускали второй поршень, давление прямо под ним было p_0, а воздух с этим давлением занимал высоту $h - l = \frac{h}{2}$. Когда поршень опустился – давление под ним стало$2p_0$(по аналогии с п.3), поэтому по закону Бойля-Мариотта

$p_0 \frac{h}{2} = 2p_0 x => x = \frac{h}{4}$ - расстояние от 1 до 2 поршня **(2 балла)**

В свою очередь, под 1 поршнем давление должно стать $3p_0$, поэтому по закону Бойля-Мариотта

$p_0 h = 3p_0 y => y = \frac{h}{3} -$ (высота, на которой находится первый поршень) **(2 балла)**

5. Высота 2 поршня после установления равновесия

$x + y = \frac{h}{3} + \frac{h}{4} = \frac{7h}{12}$ **(2 балла)**

В цилиндре перед опусканием осталось воздуха при давлении p_0

$h - \frac{7h}{12} = \frac{5h}{12}$ **(2 балла)**

Именно на него ляжет третий поршень.

6. После того, как опустили все поршни и установились давления из п.2, закон Бойля-Мариотта даёт:

$$p_0 h = 6p_0 l_1 => l_1 = \frac{h}{6}$$

$$p_0 \frac{h}{2} = 5p_0 l_2 => l_2 = \frac{h}{10}$$

$p_0 \cdot \frac{5h}{12} = 4p_0 l_3 => l_3 = \frac{5h}{48}$ **(4 балла)**

Окончательно:

$h_3 = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{h}{6} + \frac{h}{10} + \frac{5h}{48} = \frac{89h}{240}$ **(2 балла)**

Ответ: $h_3 = \frac{89h}{240}$