Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2016-2017

МАТЕМАТИКА
(Решение)

10 класс

II этап

1. Пароход вышел из пункта *А* в пункт *Б*, расположенный ниже по течению реки, и, прибыв в пункт *Б*, сразу же вернулся обратно, затратив на весь путь 5 часов. Сколько времени идет пароход от *Б* до *А*, если плоты сплавляются от *А* до *Б* за 12 часов?

(7 баллов)

Ответ: 3 часа

Оценивание. За правильное решение – 7 баллов, если есть арифметическая ошибка – 4 балла.

2. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 11 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить цифру пять.

(8 баллов)

Решение. Пусть исходное число $10a+b$, где b – цифра единиц. Тогда по условию $100a+50+b=11(10a+b)$. Откуда $10a+10b=50$ или $a+b=5$. Так как b – цифра, то искомые числа 14, 23, 32, 41 и 50.

Ответ:14, 23, 32, 41, 50.

Оценивание. За обоснованное решение – 8 баллов, если при обоснованном решении найдены 4 числа – 6 баллов, если все числа найдены подбором – 4 балла, если не все числа – 2 балла.

3. Доказать, что если $x+y+z=1$, то $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$.

(10 баллов)

Решение. По условию $x+y+z=1$ или $(x+y+z)^2=1$, т.е. $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=1$. Так как $(a-b)^2\geq 0$, то $a^2+b^2\geq 2ab$ при любых *a*, *b*, то имеем, что $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$. Поэтому $3(x^2+y^2+z^2)\geq 1$, откуда и следует, что $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$

Оценивание. За обоснованное решение – 10 баллов.

4. В остроугольном треугольнике *ABC* точка *O* является точкой пересечения высот. Найдите *OA*, если известно, что $BC=12$ и $\sin A=\frac{8}{17}$.

(10 баллов)

Решение. Из подобия треугольников BCB_1 и AOB_1 (BB_1 – высота) следует $\frac{BC}{AO}=\frac{BB_1}{AB_1}=\operatorname{tg} A$. По условию $\sin A=\frac{8}{17}$, поэтому $\cos A=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg} A=\frac{8}{15}$. Значит, $AO=\frac{BC}{\operatorname{tg} A}=\frac{15\cdot 12}{8}=22,5$.

Ответ: 22,5.

Оценивание. За обоснованное решение – 10 баллов, если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при обоснованном решении – 5 баллов.

5. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2+2a^2x-3=0$ имеет только целые корни.

(15 баллов)

Решение. Очевидно, что при $a=0$ уравнение не имеет корней, поэтому $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. Запишем данное квадратное уравнение в виде $x^2+2ax-\frac{3}{a}=0$. Если все корни уравнения целые, то из теоремы Виета следует, что будут целыми коэффициенты $2a$, $-\frac{3}{a}$. Таким образом, $a=\frac{m}{2}$, где m–целое число. Поскольку $-\frac{3}{a}=-\frac{6}{m}$ то число m обязано быть делителем 6. Отсюда следует, что m может принимать значения только из множества ±1, ±2, ±3, ±6. Проверяя все эти значения, находим, что только при $m=2$, $m=1$, $m=-3$ все корни квадратного уравнения действительно будут целыми. Следовательно, значения $a=1$, $a=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{3}{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$

Оценивание. За обоснованное решение – 15 баллов, если с помощью верного рассуждения получено два значения – 10 баллов, если одно – 6 баллов; если какие- то значения угаданы – 2 балла.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!