Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2016-2017

МАТЕМАТИКА

(Решение)

11 класс

II этап
Вариант 1

1. Определить, при каких целых значениях x функция $f(x)=\dfrac{x^2+3x-13}{x-1}$ принимает наименьшее целое значение.

(7 баллов)

Решение. Запишем функцию $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-13}{x-1}=\frac{x^2-x+4x-4-9}{x-1}=x+4-\frac{9}{x-1}.$$

Следовательно, для целых x значение $f(x)$ будет целым в том и только том случае, когда $x-1$ является одним из делителей числа 9, то есть принимает значения ±1, ±3, ±9. Вычисляя значения функции $f(x)$, находим, что наименьшее целое значение -3 функция $f(x)$ принимает при целых $x=-8,\ x=2$.

Ответ: $\min f(x)=f(2)=f(-8)=-3$.

Оценивание. За обоснованное решение – 7 баллов, если получено, что наименьшее значение функции достигается только в одной точке при обоснованном решении – 4 балла.

2. Найти все числа a и b такие, что парабола $y=ax^2+bx+1$ касается прямых $y=2x+10$ и $y=2-2x$.

(8 баллов)

Решение. Если прямая $y=kx+m$ является касательной к параболе $y=ax^2+bx+c$, то они имеют единственную общую точку, следовательно, уравнение $ax^2+bx+c=kx+m$ имеет ровно один корень. А это будет выполняться тогда и только тогда, дискриминант уравнения обращается в нуль. Поэтому, исходя из условия задачи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2+bx+1=2x+10 \\ ax^2+bx+1=2-2x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} ax^2+(b-2)x-9=0 \\ ax^2+(b+2)x-1=0 \end{cases}.$$

Вычисляя дискриминанты этих уравнений, будем иметь $\begin{cases} D_1=(b-2)^2+36a=0 \\ D_2=(b+2)^2+4a=0 \end{cases}$. Решая эту систему для определения значений a и b, находим, что $a_1=-\dfrac{1}{4}, b_1=-1;\ a_2=-1, b_2=-4$.

Ответ: $a_1=-\dfrac{1}{4}, b_1=-1;\ a_2=-1, b_2=-4$.

Оценивание. За обоснованное решение – 8 баллов, если получена только одна пара чисел a и b при обоснованном решении – 4 балла.

3. Решить уравнение $\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x-\cos\frac{\pi}{8}$.

(10 баллов)

Решение. Применяя к левой части уравнения формулу синуса двойного угла, а к правой части формулу преобразования разности косинусов в произведение получаем

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right),$$

или

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\right)=0.$$

Отсюда или $\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$, $x=\frac{\pi}{16}+\pi n\ (n\in Z)$, или $\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$.

Во втором случае , замечая, что $\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\right)$ и применяя формулу преобразования суммы синусов в произведение, будем иметь

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{16}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{16}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{16}}{2}\right)==2\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Так как $\sin\left(\frac{5\pi}{16}\right)\neq 0$, поэтому $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in Z)$.

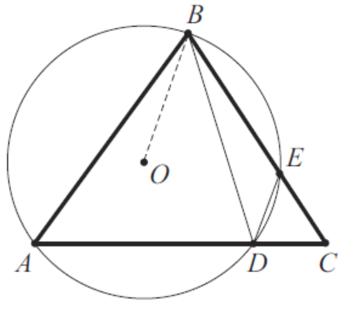
Ответ: $\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z; \frac{\pi}{16}+\pi n, n\in Z$.

Оценивание. За обоснованное решение – 10 баллов, если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения – 6 баллов.

4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса 4, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника CDE, если $BD=5$, $CD=2$.

(10 баллов)

Решение. По теореме синусов для треугольника BDE (см. рис.) получаем $\sin\angle BED=\frac{BD}{2OB}=\frac{5}{8}$,



откуда $\sin\angle CED=\sin\left(180°-\angle BED\right)=\sin\angle BED=\frac{5}{8}$. Применяя теперь теорему синусов к треугольнику CDE, находим искомый радиус: $r=\frac{CD}{2\sin\angle CED}=\frac{8}{5}=1{,}6$

Ответ: 1,6.

Оценивание. За обоснованное решение – 10 баллов, если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при обоснованном решении – 5 баллов.

5. Найти все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\geq 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

(15 баллов)

Решение. Разложим левые части неравенств на множители:

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\geq 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a)\geq 0 \\ x(x-3)(x-a)\leq 0 \end{cases}.$$

Если $a\geq 3$, то решение первого неравенства составляют множества $[1;2)\cup[a;\infty)$, а решения второго – множество $(-\infty;0]\cup[3;a]$, так что у системы будет единственное решение $x=a$. В случае же $a<3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b;3]$, где в качестве b можно взять, например, наибольшее из чисел a и 2.

Ответ: $[3;\infty)$.

Оценивание. За обоснованное решение – 15 баллов, если с помощью верного рассуждения получено множество значений $(3;\infty)$ – 10 баллов.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!