Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2016-2017

МАТЕМАТИКА
(Решение)

11 класс

IIэтап
Вариант 2

1. Определить, при каких целых значениях x функция $f(x)=\dfrac{x^2-12x+22}{x-4}$ принимает наименьшее целое значение.

(7 баллов)

Решение. Запишем функцию $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x)=\frac{x^2-12x+22}{x-4}=\frac{x^2-4x-8x+32-10}{x-4}=x-8-\frac{10}{x-4}.$$

Следовательно, для целых x значение $f(x)$ будет целым в том и только том случае, когда $x-4$ является одним из делителей числа 10, то есть принимает значения ±1, ±2, ±5, ±10. Вычисляя значения функции $f(x)$, находим, что наименьшее целое значение -13 функция $f(x)$ принимает при целых $x=-6,\ x=5$.

Ответ: $\min f(x)=f(-6)=f(5)=-13$.

2. Найти уравнение общей касательной к графикам функций $y=x^2-2x+2$ и $y=x^2-4x+6$.

(8 баллов)

Решение. Если прямая $y=kx+m$ является касательной к параболе $y=ax^2+bx+c$, то они имеют единственную общую точку, следовательно, уравнение $ax^2+bx+c=kx+m$ имеет ровно один корень. А это будет выполняться тогда и только тогда, дискриминант уравнения обращается в нуль. Поэтому, исходя из условия задачи, имеем систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-2x+2=kx+m\\ x^2-4x+6=kx+m\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x^2-(2+k)x+2-m=0\\ x^2-(4+k)x+6-m=0\end{cases}.$$

Вычисляя дискриминанты этих уравнений, будем иметь $\begin{cases}D_1=(2+k)^2-4(2-m)=0\\ D_2=(4+k)^2-4(6-m)=0\end{cases}$. Решая эту систему для определения значений k и m, находим, что $k=1,\ m=-\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $y=x-\dfrac{1}{4}$.

3. Решить уравнение $\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x+\sin\frac{\pi}{8}$.

(10 баллов)

Решение. Применяя к левой части уравнения формулу синуса двойного угла, а к правой части формулу преобразования суммы синусов в произведение, получим:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right),$$

или

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{16}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\right)=0$$

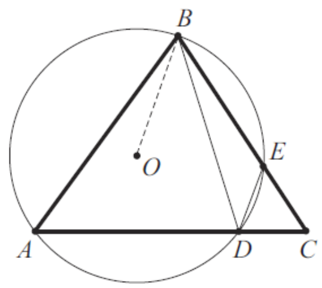
Отсюда или $\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0$, $x=-\frac{\pi}{16}+\pi n\ (n\in Z)$, или $\cos\left(x+\frac{\pi}{16}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$. Во втором случае , применяя формулу преобразования разности косинусов в произведение, будем иметь $-2\sin x\sin\frac{\pi}{8}=0$, $x=\pi k\ (k\in Z)$.

Ответ: $\pi n, n\in Z; -\frac{\pi}{16}+\pi k, k\in Z$.

4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса 3, пересекающая сторону AC в точке D. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BDC, если $AB=5$, $BC=7$.

(10 баллов)

Решение. По теореме синусов для треугольника ABD (см. рис.) получаем $\sin\angle BDA=\frac{AB}{2OB}=\frac{5}{6}$,



откуда $\sin\angle BDC=\sin\left(180°-\angle BDA\right)=\sin\angle BDA=\frac{5}{6}$. Применяя теперь теорему синусов к треугольнику BDC, находим искомый радиус: $r=\frac{BC}{2\sin\angle BDC}=\frac{21}{5}=4,2$

Ответ: 4,2.

5. Найти все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^3-(a-4)x^2+(5-3a)x-2a+2\le 0\\ x^3-(a-4)x^2+(3-3a)x\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

(15 баллов)

Решение. Разложим левые части неравенств на множители:

$$\begin{cases}x^3-(a-4)x^2+(5-3a)x-2a+2\le 0\\ x^3-(a-4)x^2+(3-3a)x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x+2)(x+1-a)\le 0\\ x(x+3)(x+1-a)\ge 0\end{cases}.$$

Если $a-1\le -3$, то решение первого неравенства составляют множества $(-\infty;a-1]\cup[-2;-1]$, а решения второго – множество $[a-1;-3]\cup[0;+\infty)$, так что у системы будет единственное решение

$x=a-1$. В случае же $a-1>-3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[-3;b]$, где в качестве b можно взять, например, наименьшее из чисел -1 и $a-1$.

Ответ: $(-\infty;-2]$.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!