Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2016-2017

МАТЕМАТИКА (Решение)

8-9 класс

II этап

1. В первый день турист прошел 20% всего маршрута и еще 2 км. Во второй день он прошел 50% остатка и еще 1 км. На третий день он прошел 25% остатка и еще 3 км. В итоге ему осталось пройти 18 км. Определите длину маршрута.

(7 баллов)

Решение. В конце третьего дня после прохождения 25% остатка пути туристу осталось пройти 21 км, следовательно, после двух дней ему осталось пройти 28 км. 29 км - это 50% от остатка пути, пройденного за первый день, значит после первого дня ему осталось пройти 58 км. 60 км осталось пройти туристу после того, как он прошел за первый день прошел 20% всего пути, следовательно, длина всего маршрута составляет 75 км.

Ответ: 75 км.

Оценивание. За правильное решение – 7 баллов, если есть арифметическая ошибка – 4 балла.

2. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 6 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить нуль.

(8 баллов)

Решение. Пусть исходное число $10a+b$, где b – цифра единиц. Тогда по условию $100a+b=6(10a+b)$. Откуда $40a=5b$ или $b=8a$. Так как b – цифра, то отсюда следует, что единственным искомым числом является 18.

Ответ: 18.

Оценивание. За обоснованное решение – 8 баллов, если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений – 3 балла.

3. Доказать, что $x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+yz$.

(10 баллов)

Решение. Так как $(a-b)^2 \ge 0$, то $a^2+b^2 \ge 2ab$ при любых a, b. Поэтому

$$x^2+y^2 \ge 2xy,$$
$$y^2+z^2 \ge 2yz,$$
$$z^2+x^2 \ge 2zx,$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+yz,$$

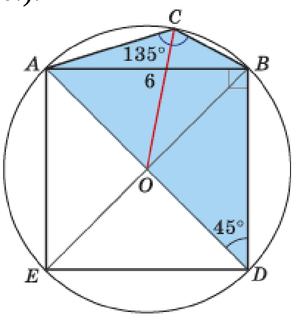
что и требовалось доказать.

Оценивание. За обоснованное решение – 10 баллов.

4. В треугольнике ABC угол C равен 135°. На стороне AB вне треугольника построен квадрат с центром O. Найдите OC, если $AB = 10$.

(10 баллов)

Решение. Пусть $ABDE$ — построенный квадрат. Его диагональ образует со стороной угол 45°, значит, $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ (см. рис.).



Следовательно, около четырехугольника $ACBD$ можно описать окружность. Так как угол ABD, вписанный в эту окружность, прямой, то центр O окружности является серединой диагонали AD квадрата, то есть его центром. Тогда OC — радиус этой окружности. Таким образом,

$OC = \frac{1}{2} AD = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Оценивание. За обоснованное решение – 10 баллов, если получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при обоснованном решении – 5 баллов.

5. Про целые числа a, b, c известно, что $a+b+c=1$. Докажите, что число $(a+bc)(b+ac)(c+ab)$ является точным квадратом.

(15 баллов)

Решение. Из того, что $a+b+c=1$, следует, что $a=1-b-c$, $b=1-a-c$, $c=1-a-b$. Тогда

$$(a+bc)(b+ac)(c+ab)=(1-b-c+bc)(1-a-c+ac)(1-a-b+ab)=$$
$$(1-b)(1-c)(1-a)(1-c)(1-a)(1-b)=\left((a-1)(b-1)(c-1)\right)^2.$$

Так как числа a, b и c — целые, то число $(a-1)(b-1)(c-1)$ также является целым, что и требовалось.

Оценивание. За обоснованное решение – 15 баллов, если утверждение доказано для каких-то частных случаев – 1 балл.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!